Universidad de Granada

TRABAJO FIN DE MÁSTER: IDEA DE LUGAR GEOMÉTRICO EN EL PLANO. CÓNICAS

Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.
Especialidad: MATEMÁTICAS

MARÍA DOLORES MOZAS GAY

Mayo de 2010

Universidad de Granada

IDEA DE LUGAR GEOMÉTRICO EN EL PLANO. CÓNICAS

Memoria de TRABAJO FIN DE MÁSTER realizada bajo la tutela del Doctor José Luis Lupiáñez Gómez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Mª Dolores Mozas Gay, dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Mª Dolores Mozas Gay

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.

2. PLANIFICACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.

3. ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL TEMA: “IDEA DE LUGAR GEOMÉTRICO.CÓNICAS”.

   3.1 ¿CÓMO SURGIERON?

   3.2 ¿QUÉ SON? ¿CÓMO NOS RELACIONAMOS CON ELLAS?

   3.3 ¿CÓMO PUEDEN RECONOCERSE?

   3.4 ¿PARA QUÉ SIRVEN?

   3.5 ¿QUÉ EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE TENEMOS?

   3.6 ¿QUÉ LIMITACIONES PUEDEN SURGIR EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE?

   3.7 ¿CÓMO PLANIFICAMOS LA ENSEÑANZA?

   3.8 ¿CÓMO EVALUAMOS EL APRENDIZAJE DEL ALUMNADO?

4. PLANIFICACIÓN DE LA ENSEÑANZA.

   4.1 OBJETIVOS DE ETAPA.

   4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

   4.3 CONTENIDOS.

      4.3.1 CONCEPTUALES.

      4.3.2 PROCEDIMENTALES.

      4.3.3 ACTITUDINALES.

   4.4 DESCRIPCIÓN DE LAS SESIONES DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.

5. **CONCLUSIÓN.**

6. **BIBLIOGRAFÍA.**

7. **ANEXO: ANÁLISIS DE CONTENIDOS, COGNITIVO Y DE INSTRUCCIÓN "IDEA DE LUGAR GEOMÉTRICO EN EL PLANO. CÓNICAS".**

IDEA DE LUGAR GEOMÉTRICO EN EL PLANO. CÓNICAS

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo proponemos una unidad didáctica destinada al alumnado que ha superado la etapa obligatoria de la enseñanza; nos encontramos en el primer año de Bachillerato cuya principal característica es el ser un ciclo de enseñanza post-obligatorio donde los escolares principalmente desea continuar su etapa educativa. Los aspectos de la enseñanza deben de ir bien dirigidos tanto a cubrir necesidades académicas para cursos posteriores como necesidades propias para la resolución de problemas de la vida cotidiana. En este ámbito, se debe de tener siempre presente en el aula la importancia de las Matemáticas como elemento de la cultura.
El proceso educativo que proponemos en la presente unidad, estará caracterizado por la búsqueda de la motivación y el interés del alumnado, por lo que será fundamental destacar la importancia de las cónicas en la vida cotidiana.
Un elemento muy importante va a ser el uso de las nuevas tecnologías de forma eficiente y razonada para mejorar el aprendizaje e introducir una nueva forma de metodología práctica acorde a la era de la información en la que vivimos. Por esta razón, una actividad muy importante para completar el aprendizaje va a ser la representación de las cónicas mediante el ordenador.

La unidad didáctica que presentamos está estructurada en cinco apartados. El primero contempla la aportación de la revisión curricular. En el segundo apartado, aparece la planificación de dicha unidad mediante la historia de las cónicas, mapa conceptual, sistemas de representación, fenomenología, expectativas de aprendizaje, competencias, errores y dificultades involucrados en el tema, metodología, tipo de evaluación y criterios e instrumentos de evaluación. La parte tercera, contiene la planificación de la enseñanza, es decir, objetivos de etapa y específicos, contenidos, sesiones y temporalización. A continuación en la cuarta, se destaca una breve conclusión. Y por último, aparece la bibliografía consultada.

2. PLANIFICACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

La investigación en la Educación Matemática pone de manifiesto que para planificar una unidad didáctica es fundamental revisar la ubicación y tratamiento de cada uno de los tópicos que se consideran en el Currículo del Ministerio y en el de la correspondiente Comunidad Autónoma en la que nos encontramos trabajando (Rico, 1997).
Por tanto, a continuación comentaremos la ubicación y tratamiento en el diseño curricular del Ministerio y la Comunidad Autónoma Andaluza.
Los contenidos que corresponden a nuestro tema "Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas" queda reflejado muy escuetamente en el currículo concretamente en el Real Decreto 1467/2007 del 2 de noviembre por el que se establece la estructura de Bachillerato y se fijan las enseñanzas mínimas (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b). Podemos obtenerlo en el apartado de Matemáticas I de la modalidad de Bachillerato Ciencias y Tecnología en el bloque de Geometría, dicho tema aparece tratado conjuntamente con los contenidos relativos al espacio.

También podemos destacar que en la Orden 2220/2007 del Currículo de Secundaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a), en el área de Matemáticas se habla de una cónica concreta, la circunferencia, pero como figura plana. Literalmente se hace referencia de la siguiente forma: “La circunferencia y el círculo: descripción, elementos y propiedades. Arco de circunferencia. Ángulo inscrito y ángulo central. Sector y segmento circular.”

También se pueden observar algunas indicaciones metodológicas que consideramos oportunas a tener en cuenta en la unidad didáctica (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a):

- *En la enseñanza de las matemáticas debemos disponer de diferentes herramientas que nos ayuden a motivar a los jóvenes a utilizarlas, dentro y fuera del aula, para encontrar soluciones a determinadas cuestiones relacionadas con su vida cotidiana o con su aplicación en otras áreas.*

- *Las opciones metodológicas que se tomen van a ser fundamentales, incluso más que la propia introducción de unos u otros contenidos.*

- *La utilización racional de las herramientas tecnológicas. El uso adecuado de calculadoras y software específico en el aprendizaje de los contenidos matemáticos mejora el desarrollo cognitivo en aspectos como el sentido numérico, la visualización o la relación entre diferentes contenidos.*

- *El empleo de calculadoras y programas informáticos en la Educación secundaria obligatoria está especialmente indicado en la comparación, aproximación o las relaciones entre las diferentes formas de expresar los números, en el estudio de la geometría dinámica y en los contenidos relacionados con la utilización de gráficas y, en general, en la interpretación, tratamiento y representación de la información.*

- *La fuerte abstracción simbólica, el saber matemático, deben tener en esta materia una relativa presencia. Las fórmulas, una vez que se las ha dotado de significado, adoptan un papel de referencia que facilita la interpretación de los resultados pero, ni su obtención, ni su cálculo y mucho menos su memorización, deben ser objeto de estudio. Por su parte, las herramientas tecnológicas ofrecen la posibilidad de evitar tediosos cálculos que poco o nada aportan al tratamiento de la información. No por ello debe dejarse de trabajar la fluidez y la precisión en el cálculo manual simple, donde los estudiantes suelen cometer frecuentes errores que les pueden llevar a falsos resultados o inducirle a confusión en las conclusiones.*

Ahora vamos a llevar a cabo el Análisis Didáctico de nuestro tema para explorar y organizar toda la complejidad del tema de cónicas. Este análisis se apoya en los trabajos de Gómez (2007) y Lupiáñez (2009), y se estructura en cuatro fases: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación. En el apartado de planificación, nos centramos en los tres primeros, cuyo desarrollo completo aparece en el anexo adjunto. En este documento, nos centraremos en el análisis de contenido y en el análisis cognitivo y, abordaremos una descripción dando respuesta a las principales cuestiones que proponen estos análisis y otras facetas claves de la planificación.

3. ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL TEMA: "IDEA DE LUGAR GEOMÉRICO EN EL PLANO. CÓNICAS"

Para confeccionar este apartado nos hemos centrado en dar respuesta a diferentes cuestiones que permiten organizar la información más relevante para el análisis de este tema. Las cuestiones que hemos considerado son:

- ¿Cómo surgieron?
- ¿Qué son? ¿Cómo nos relacionamos con ellas?
- ¿Cómo pueden reconocerse?
- ¿Para qué sirven?
- ¿Qué expectativas de aprendizaje tenemos?
- ¿Qué limitaciones pueden surgir en el proceso de enseñanza-aprendizaje?
- ¿Cómo planificamos la enseñanza?
- ¿Cómo evaluamos el aprendizaje del alumnado?

En la primera cuestión abordamos el origen histórico de las cónicas, en la segunda planteamos los contenidos que envuelve el tema, con la tercera nos centramos en los distintos sistemas de representación, en la siguiente estudiamos dónde podemos encontrar las cónicas en la vida cotidiana, en la quinta mostramos las expectativas específicas del tema, en la posterior cuestión hablamos de los principales errores y limitaciones que presenta el alumnado ante dicho tema, para la séptima nos centramos en la metodología seguida y por último presentamos la evaluación junto con sus criterios e instrumentos además de los criterios de calificación.

3.1 . ¿CÓMO SURGIERON?

Para llegar a entender completamente un concepto hay que conocer sus orígenes: cómo surgieron, cuándo, cómo, por qué, etc.

En primer lugar, podemos pensar que las formas del sol y de la luna debieron influir decisivamente en el temprano descubrimiento y consagración de la circunferencia como la forma geométrica plana más regular. Podemos encontrar construcciones arquitectónicas con esta forma a partir del siglo XIX a.C., lo que configura a la circunferencia, después de la recta, como el primer lugar geométrico conocido y utilizado por la humanidad.

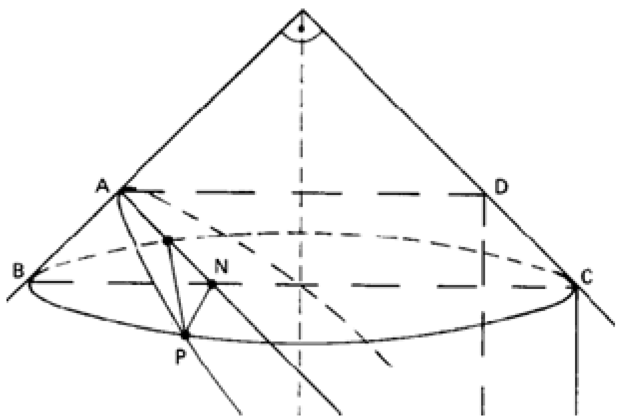
Para encontrar otros nuevos, hay que esperar hasta la cultura griega de los siglos V y IV a.C. Por entonces surgen tres problemas clásicos: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. El problema de la duplicación del cubo fue el más famoso en los tiempos de los antiguos griegos. Hay dos narraciones diferentes dadas por comentadores posteriores sobre los orígenes del problema.

La primera fue transmitida por Eratóstenes. Éste, es su obra titulada Platonicus relata que, cuando el dios anunció a los delianos (este problema también se llama problema de Delos) a través del oráculo que, para deshacerse de una plaga, debían construir un altar del doble del que había, sus artesanos quedaron desconcertados en sus esfuerzos por descubrir cómo podían hacer un sólido que fuera el doble de otro sólido similar; por ello fueron a preguntarle al respecto a Platón, quien respondió que el oráculo quería decir no que el dios quisiera un altar del doble del tamaño sino que deseaba, al imponerles la tarea, avergonzar a los griegos por su descuido de las matemáticas y su desprecio por la geometría.

Eutocio, en su comentario a *Sobre la esfera y el cilindro* de Arquímedes, dio una versión un tanto distinta. Esta se supone que es una carta escrita por Eratóstenes al Rey Tolomeo y, aunque la carta es una falsificación.

Muchos sabios y filósofos se ocuparon de la resolución de estos problemas y, aunque sin demostrarlo rigurosamente, pronto se dieron cuenta que la solución era imposible utilizando sólo la regla y el compás un número finito de veces.

En aquella época sólo se admitían dos maneras de definir curvas: con composiciones de movimiento uniformes y como intersección de superficies geométricas conocidas. Menecmo (IV a.C.) descubrió que las secciones planas de un cono servía para resolver la duplicación del cubo. Desde el siglo anterior, se conocía la cuadratura de un rectángulo. La resolución de este problema era equivalente a la resolución de la duplicación del cubo pues tomando a como la arista del cubo inicial y b=2 a, la expresión de la media geométrica ($\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$) conduce a $x^2 = ay$; $y^2 = 2ax$, es decir, $x^3 = 2a^2$ y, por tanto, x sería la longitud del cubo cuyo volumen es el doble del dado. Menecmo trató de resolver este problema hallando curva cuyos puntos verificasen las dos ecuaciones anteriores, y esto lo consiguió seccionando un cono rectángulo con un plano perpendicular a una de sus generatrices, obteniendo la parábola:



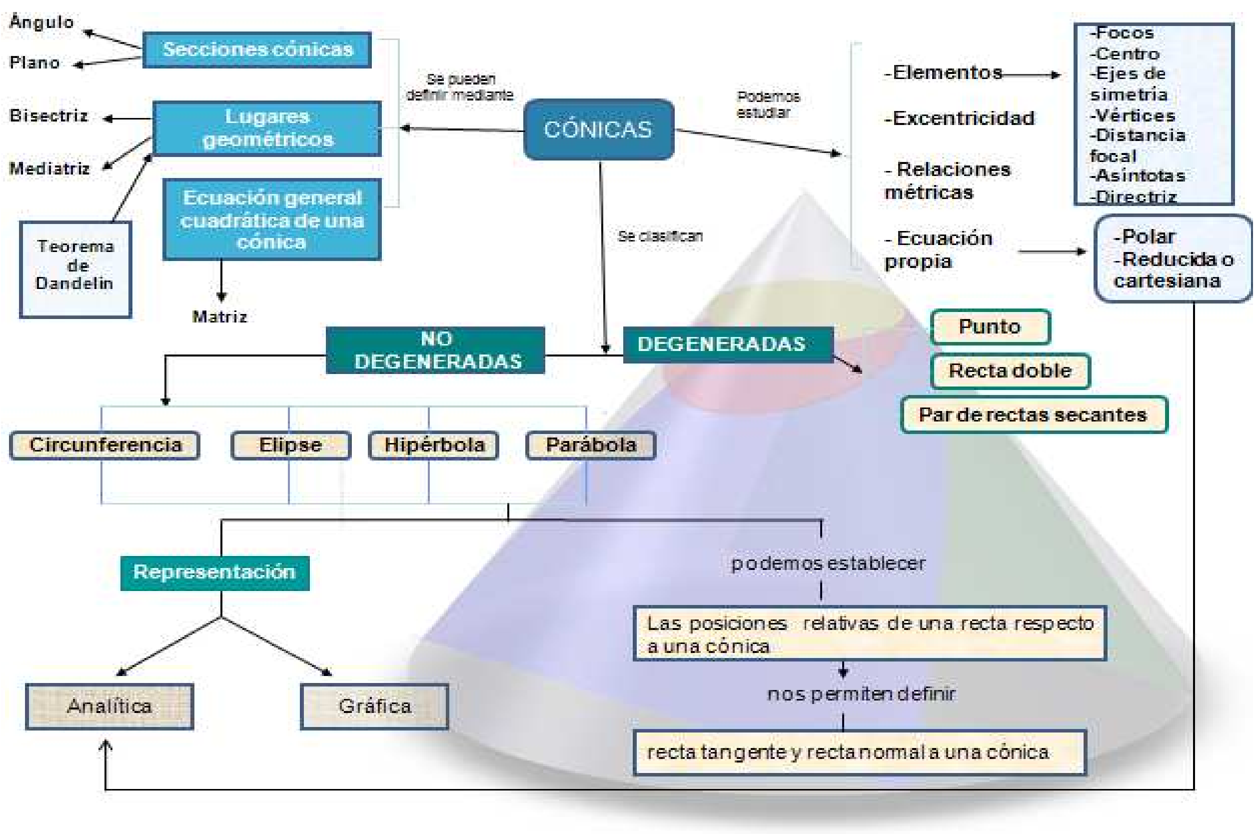
Menecmo descubrió también la elipse y la hipérbola, seccionando conos acutángulos y obtusángulos respectivamente con planos perpendiculares a una de sus generatrices. Por esto, en esta época, estas curvas recibían el nombre de oxiotoma (elipse), amblitoma (hipérbola) y ortotoma (parábola).

Hemos señalado que Menecmo obtenía los tres tipos de curvas a partir de conos rectos de tres tipos distintos, según que el ángulo del vértice fuese agudo, recto u obtuso, y siempre tomando secciones perpendiculares a una generatriz. Años más tarde, Apolonio las obtiene utilizando un cono circular cualquiera variando la inclinación del plano secante y, a partir de esto, descubre una propiedad plana que caracteriza a cada una de las secciones, es decir, una caracterización de estas curvas como lugares geométricos. Fue él también quien le dio el nombre que aún hoy conservamos: **elipse** viene del término griego *elleipsis* que significa insuficiencia; **hipérbola** viene de *hiperbolé* que significa exceso y **parábola** viene de *parabole* que significa equiparación (estos nombres provienen del estudio de sus ecuaciones reducidas). Apolonio también introdujo el estudio de tangencias, diámetros y rectas normales.

3.2 . ¿QUÉ SON? ¿CÓMO NOS RELACIONAMOS CON ELLAS?

Tras haber estudiado el origen de las cónicas y de dónde proceden, nos aproximamos al concepto en sí a través de varias vías principales.

El estudio conceptual que hemos desarrollado sobre este tema se recoge en el siguiente mapa conceptual que abarca los contenidos fundamentales que organizan el tema, y que comentaremos seguidamente.



Como se recoge en el mapa conceptual, un primer modo de definir el concepto puede ser el cono, realizando las diferentes secciones posibles y estudiando el resultado obtenido. Esta forma de presentarlas nos permite hacer una clasificación de éstas, atendiendo a si la sección contiene el punto singular del cono o no, dividiéndolas así en degeneradas (sí lo contienen) y no degeneradas (no lo contienen). Nuestro estudio se centrará en estas últimas, ya que presentan propiedades más interesantes y nos permiten realizar una investigación más profunda y caracterizarlas y expresarlas de varias formas. Son: la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.

Una segunda forma de definir las diferentes cónicas es como lugares geométricos del plano, basándonos en propiedades que caracterizan a cada uno de ellas, enriqueciendo esta presentación con la construcción gráfica de las diferentes cónicas.

Un tercer modo, y último, de definirlas es mediante sus ecuaciones cartesianas o su ecuación general, estableciendo propiedades sobre los parámetros que intervienen y que las caracterizan.

Una vez realizada la descripción matemática del tema, pasamos al estudio de numerosos elementos que intervienen en cada una de las cónicas (Focos, centro, ejes, distancia focal, excentricidad, asíntotas,..), y de sus propiedades que nos ayudan recordar las diferentes cónicas y sus características.

Así mismo, estudiamos las distintas ecuaciones,(polar, cartesiana), por las que puede venir definida una misma cónica. Además completamos el estudio con las diferentes representaciones que se pueden realizar de las cónicas, desde su construcción con regla y compás, con papiroflexia, seccionando un cono, o su representación analítica, hasta ver la cantidad de ejemplos de la vida real en las que intervienen.

Sin duda, otro procedimiento interesante para llevar en el estudio de las cónicas es el estudio de posiciones relativas, tanto entre algunas cónicas como entre cónicas y rectas, que nos permitirá definir los conceptos de recta tangente y recta normal a una cónica.

A pesar de todo, el estudio recoge en rasgos generales todo un arsenal de conceptos relacionados que se comentarán a continuación.

A la hora de interpretar, manipular y establecer relaciones con las cónicas llevamos a cabo diferentes procedimientos que podríamos agrupar en cuatro categorías generales:

Origen

Entender, interiorizar y abstraer el origen geométrico de las curvas cónicas como secciones del cono y como lugar geométrico a través de:

- Visualizaciones.
- Manipulación directa con el cono.
- Interpretación de las relaciones entre cada figura y ángulo de cada sección.
- Interpretación y relación de cada idea de lugar geométrico con la cónica asociada (construcción y manipulación con geogebra).
- Asociación de esta idea con fenómenos de la vida (lámpara cónica, problema del jardinero).

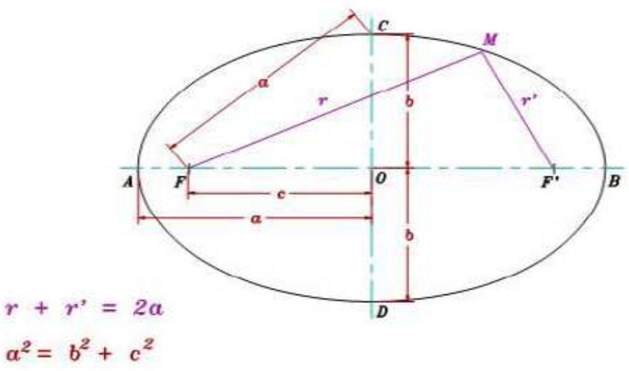
Fórmula

Establecer relaciones y caminos entre las distintas representaciones da cada figura. Resolución de problemas analítico-gráficos.

- Representación de una cónica a partir de ecuación polar o analítica.
- Paso de una representación simbólica a otra (polar-analítica y viceversa).
- Deducción de ecuaciones a partir de la gráfica.
- Diferenciación del tipo de cónica a partir de su fórmula.
- Resolución de problemas de construcción a partir de diferentes datos.
- Identificación de puntos notables (centro, focos, vértice,..).
- Relación de distintas figuras con sus propiedades (excentricidad, asíntotas).

Como es en el caso de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Cónicas y rectas

Construir y relacionar rectas notables asociadas a las cónicas.

- Cálculo de recta tangente y normal a partir de la ecuación simbólica.
- Comprensión de las posiciones relativas entre recta y cónica.
- Representación de la idea de tangencia, así como la de secante y la de exterior.

Resolución de problemas

Resolución de problemas métricos y geométricos.

- Construcción de una cónica a partir de información meramente verbal o textual (a través de la idea de lugar geométrico). Bien se gráficamente o con el ordenador.
- Observación mediante el cálculo y la resolución de problemas aquellas cuestiones que se simplifican a través del uso de las cónicas.

Como hemos visto hay diversos procedimientos implicados y de diverso tipo. Tiene un gran peso la parte analítica pues en el trabajo con cónicas una gran parte del trabajo se hace a través de su fórmula. La parte visual, geométrica e interpretativa es también un ingrediente fundamental y aquellos procedimientos que permitan relacionar unos conceptos con otros (resolución de problemas) y los que permitan relacionar los conceptos con situaciones reales y tangibles (aplicaciones).

3.3 . ¿CÓMO PUEDEN RECONOCERSE?

Una vez contestadas las preguntas anteriores cabe preguntarse cómo se pueden reconocer o representar las cónicas. Hay varias formas de representar a las cónicas y las que hemos seleccionado para el nivel que corresponde a este tema son: simbólica, numérica, tecnológica, manipulativa y gráfica. Los sistemas que se presentan a continuación no son aislados o independientes. Todos ellos están íntimamente relacionados. Ejemplificamos en el caso de la elipse.

Simbólica

Este sistema de representación se basa en la identificación de una cónica a través de su ecuación. Esta ecuación puede ser de tres tipos:

- Ecuación general
- Ecuación polar
- Ecuación cartesiana

Estos tres tipos de ecuaciones no son independientes, podemos pasar de una a otra haciendo unas simples transformaciones.

Vamos a ejemplificar en el caso de la elipse:

- Ecuación general:

$$Bx^2 + Cy^2 + Dxy + Fx + Gy + H = 0.$$

  con la condición de

- Ecuación cartesiana:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Ecuación polar:

$$\rho(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

Numérica

Una cónica se puede representar de forma numérica a través de dos maneras distintas, mediante:
Una matriz. Ésta forma está íntimamente ligada con la ecuación general de una cónica y por tanto con la forma simbólica.
La relación que las cónicas tienen con sus elementos asociados (focos, centros, excentricidades,…)

Concretamente, la forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=0,$$

donde

$$a_{00}=H,\ \ a_{11}=B,\ \ a_{22}=C,\ \ a_{12}=a_{21}=\frac{D}{2},\ \ a_{01}=a_{10}=\frac{F}{2},\ \ a_{02}=a_{20}=\frac{G}{2}$$

Para la elipse:

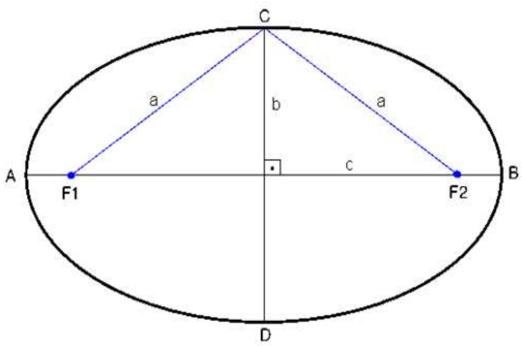
$$1+3x+2y+x^2-4xy+7y^2=0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=0.$$

La relación que la elipse tiene con sus elementos asociados es:

Si representamos por 2 a la longitud del hilo que hemos considerado para dibujar la elipse, podemos hallar la medida de algunos elementos de la elipse y las relaciones entre ellos.

Consideraremos que 2 b representa la longitud del eje menor, es decir, que CD = 2 b, y que 2 c representa la distancia focal, es decir, F1F2=2c.



Puesto que A es un punto de la elipse, se verifica que AF1 + AF2 = 2 a, y como A F1 = B F2, se tiene que:

A B = B F1 + A F1= B F1 + B F2 = 2 a

Luego la longitud del eje mayor es: AB= 2 a

Puesto que C es un punto de la elipse, se verifica que CF1 + CF2 = 2 a, y como C también es un punto de la mediatriz del segmento F1 F2, cumple que CF2 = CF1. Así pues:

CF2+CF1= CF2+CF2= 2 a ➔ CF2 = a

Observemos que en la figura el triángulo COF es rectángulo, luego podemos afirmar que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Al variar la distancia focal, manteniendo constante el semieje mayor a, varía el achatamiento de la elipse. Éste se mide mediante un número que se denomina excentricidad definido como el cociente entre la semidistancia focal y el semieje mayor:

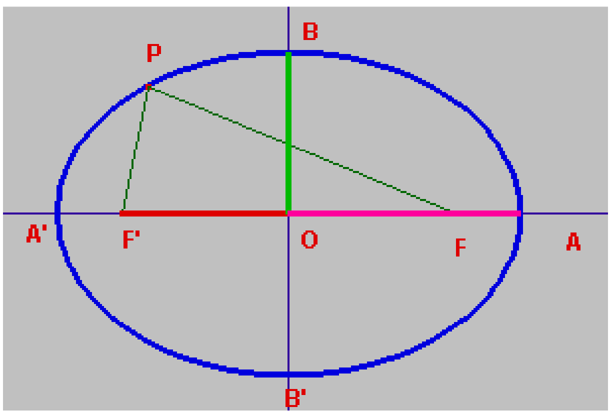
$$e = \frac{c}{a}$$

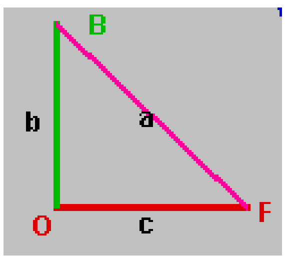
Gráfico

La representación gráfica de la elipse se puede abordar desde dos perspectivas distintas:

- Como representación plana. Este tipo de representación está muy ligada a la representación numérica a través de sus elementos.
- Como sección de un cono. La cónica se representa a partir de la sección de un cono mediante un plano. Variando la inclinación de este podemos conseguir las cuatro cónicas.

Representación gráfica plana de la elipse





- Sean F y F' los focos de la elipse.
- La distancia de F F' se llama *distancia focal* y se designa por 2c.
- El punto medio O del segmento FF' se llama *centro* de la elipse.

- El segmento BB' mediatriz del segmento FF' se llama *eje menor* y su longitud es 2b.
- El segmento AA' se llama *eje mayor* de la elipse y su longitud es 2a.
- Los segmentos PF y PF' se llaman *radios vectores* y su suma es igual a 2a.
- Los semiejes a, b y c de la elipse forman un triángulo rectángulo: $a^2 = b^2 + c^2$
- El cociente $e = \frac{c}{a}$ se llama *excentricidad* de la elipse.

Representación espacial de la elipse como sección del cono

Manipulativo

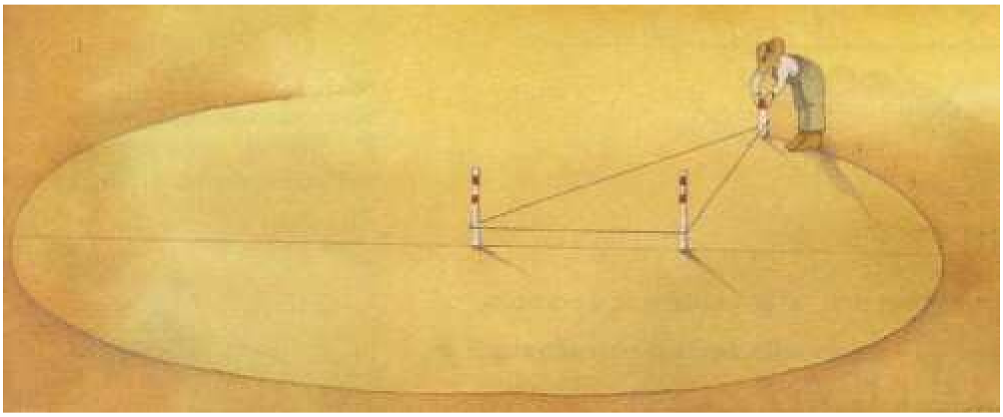
Una de las maneras con la que podemos abordar la representación de las cónicas es de forma manipulativa, esto es, utilizando las herramientas necesarias podemos representar cualquiera de las cuatro cónicas. Los métodos seleccionados en este caso son:

- El cono de madera. Este material manipulativo permite obtener las cónicas como secciones del cono. El cono tiene las secciones que dan lugar a las cuatro cónicas.
- Problema del jardinero. Utilizando dos palos y una cuerda de longitud fija, podemos representar a la elipse.
- Papiroflexia. Podemos representar a las cuatro cónicas utilizando únicamente papel. Las propiedades de simetría y reflexión de éstas, permiten obtener de forma aproximada sus representaciones mediante pliegues de un papel.
- Iluminación. El uso de una lámpara con tulipa circular o el uso de una linterna junto con una superficie esférica como puede ser un balón nos permite representar a las cónicas mediante sombras variando la posición de la luz con respecto al objeto.

Para la elipse, tenemos:

- Construcción de ésta con el método del jardinero:

Para dibujar la elipse en la tierra, ha puesto dos estacas en el suelo separadas una cierta distancia y está utilizando una cuerda con sus extremos unidos. El jardinero tensa la cuerda con las dos estacas y una vara que sujeta con la mano y dibuja la elipse creando un surco con la vara mientras se asegura de que la cuerda siempre forma un triángulo:

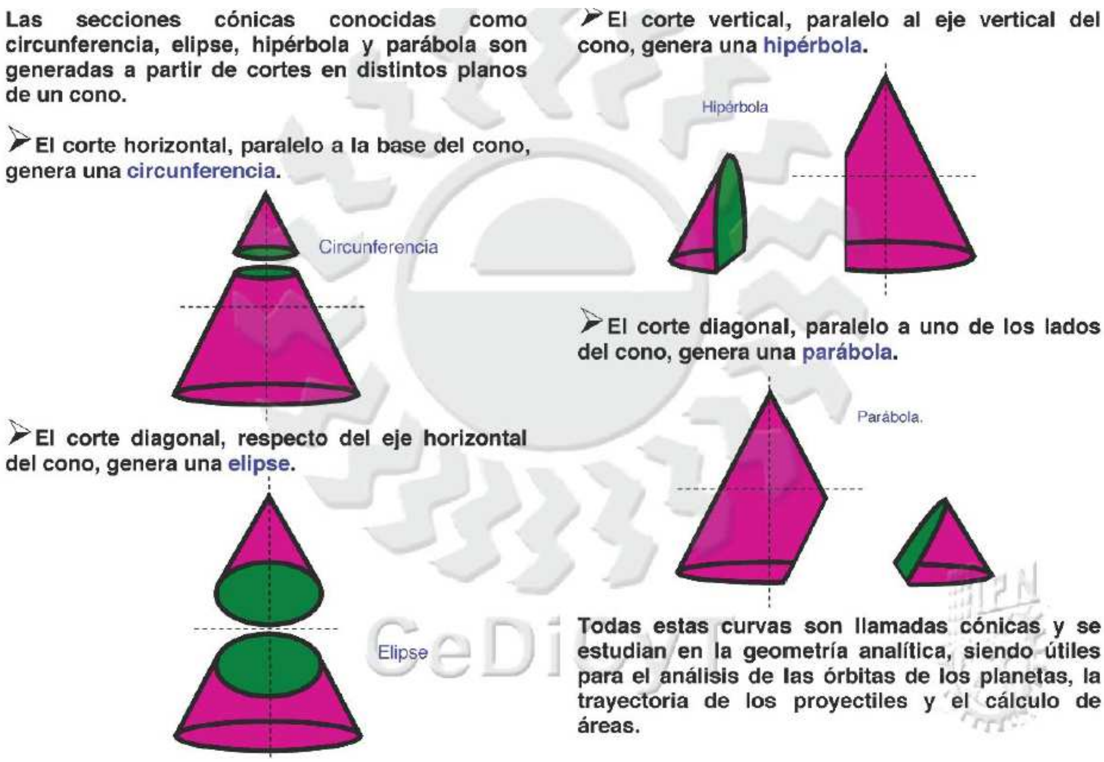


- <u>Papiroflexia</u>

Podemos construir las diferentes cónicas con un simple papel haciendo uso de la papiroflexia. Posteriormente, lo propondremos como actividad y lo veremos más detalladamente.

- <u>Cono de madera</u>

Nos referimos a un material consistente en un doble cono de madera al que se le van quitando piezas y podemos ir visualizando las diferentes cónicas. Puede ser algo parecido a lo siguiente:



Tecnológica

Los programas informáticos actuales son de gran utilidad para la representación de cónicas. Son muchas las formas en que podemos representar una cónica en estos soportes:

Simbólica. Introduciendo algunas de los tres tipos de ecuaciones.
Numérica. Indicando cuál es la matriz o los elementos de la cónica.
Gráfica. Representando directamente la cónica.

Los programas que podemos utilizar para ello son, entre otros, los siguientes:

- Geogebra.
- Cinderella.
- Cabri.
- Mathematica.

Concretamente para la elipse tenemos:

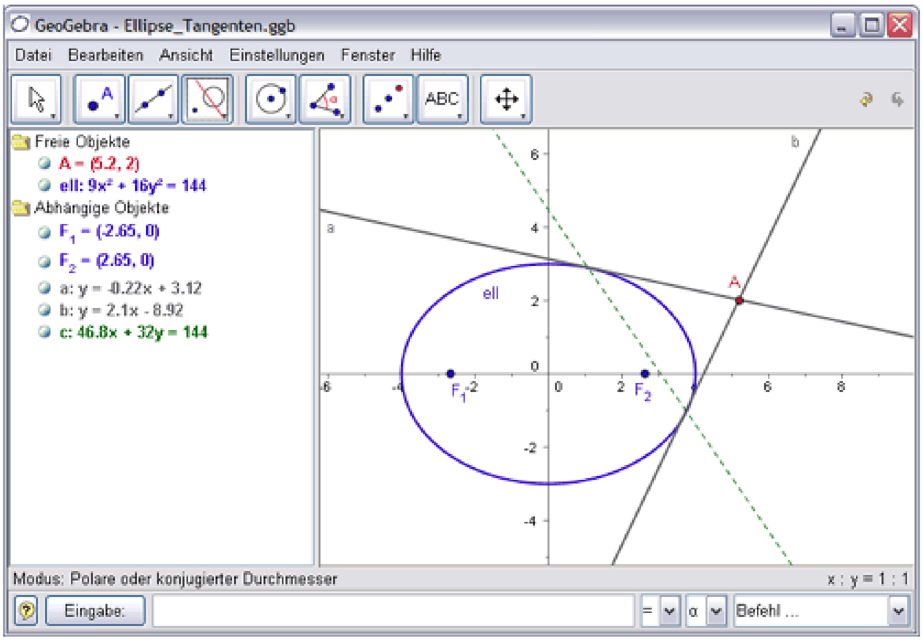
- Video de youtube

En el siguiente enlace podemos ver un video de la construcción de una elipse con regla y compás:

http://www.youtube.com/watch?v=1c8WKA2yUvE

- Geogebra

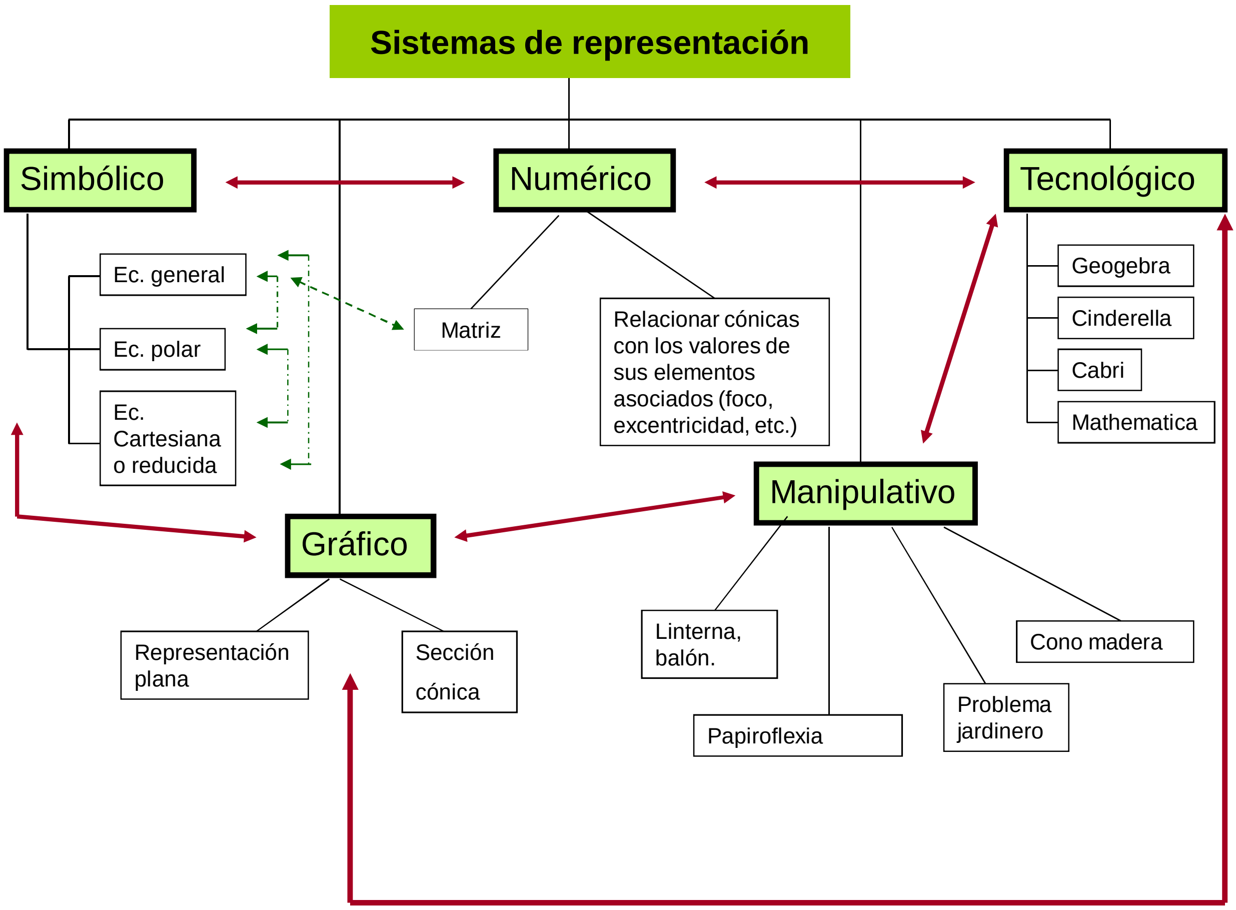
Con este programa podemos construir una elipse teniendo en cuenta sus propiedades, sobre todo, que la suma de la distancia de cualquier punto a los focos es constante:



Además, existen hojas dinámicas en las que podemos mover los focos y ver lo que ocurre, como por ejemplo en la siguiente página:

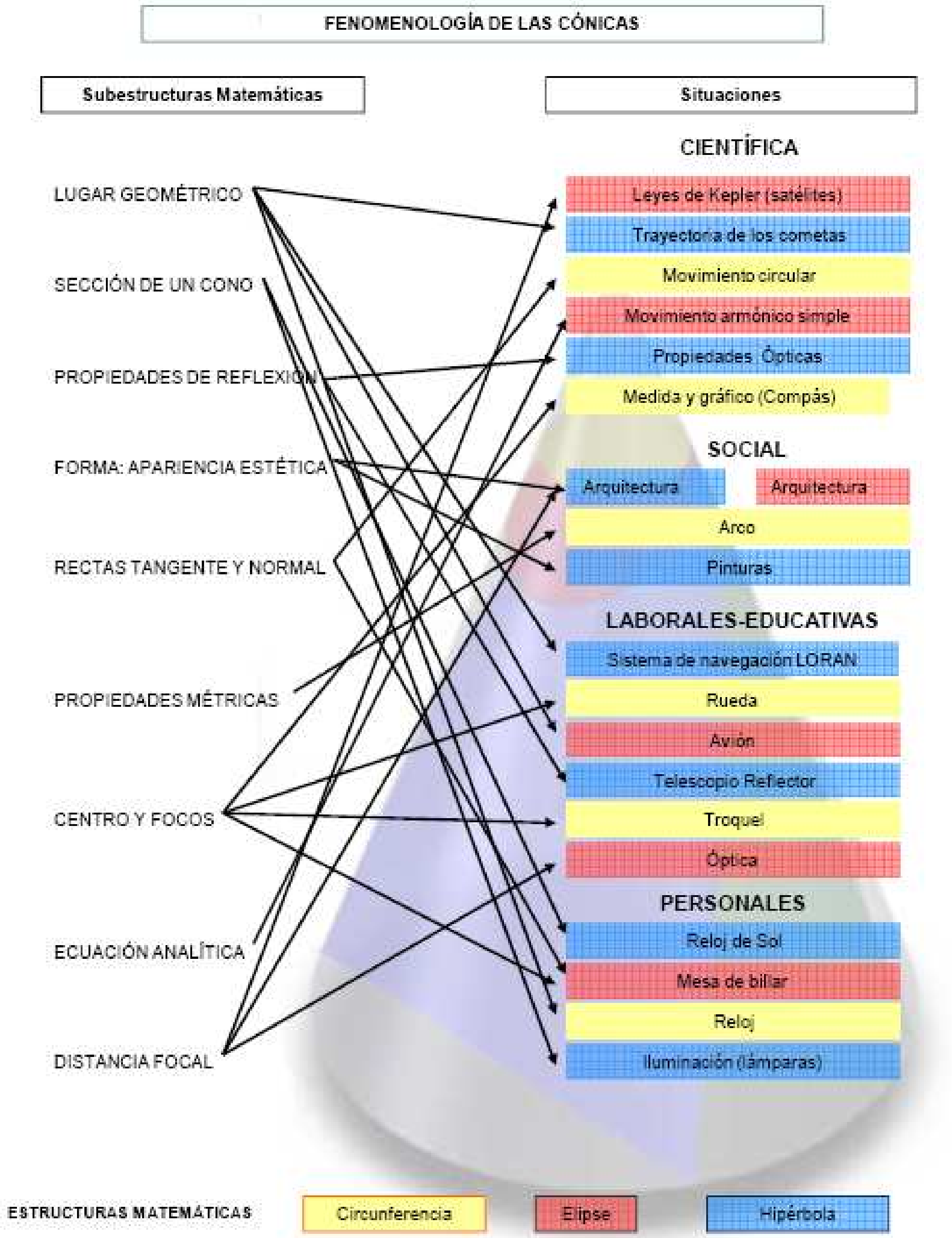
http://centros5.pntic.mec.es/ies.victoria.kent/RinconC/Simulaci/Elipse/Elipse.html

Como se mencionó al principio todos estos métodos de representación están relacionados. El siguiente esquema muestra las posibles representaciones de las cónicas junto con las relaciones existentes entre ellas.



3.4 . ¿PARA QUÉ SIRVEN?

En la figura siguiente mostramos las relaciones básicas entre algunas subestructuras matemáticas de las cónicas y diversos fenómenos y campos de problemas en los que aparecen dichas subestructuras organizadas por tipo de situaciones.



A la hora de estudiar la fenomenología de las cónicas, y relacionarla con las subestructuras asociadas, podemos encontrar infinitos ejemplos. En este estudio nos reduciremos a una muestra por la imposibilidad de enumerarlos todos. La importancia fundamental de las cónicas reside en el aparato sensitivo del hombre mismo. Su capacidad de percepción depende principalmente del ojo. El hombre, es ante todo, una criatura que mira, y los rayos luminosos que penetran en el ojo o que de él parten en dirección contraria para construir la visión forman un cono. Nos hemos centrado en la cónica que desde nuestro punto de vista muestra más relevancia en este apartado.

LA ELIPSE

La elipse es la curva que describen los planetas en su giro alrededor del Sol, pero, por razones obvias no podemos verla tal cual. Encontrar elipses a nuestro alrededor, aparentemente es difícil, pero sólo aparentemente. Vamos a ver a continuación algunos ejemplos.

- **ARQUITECTURA**

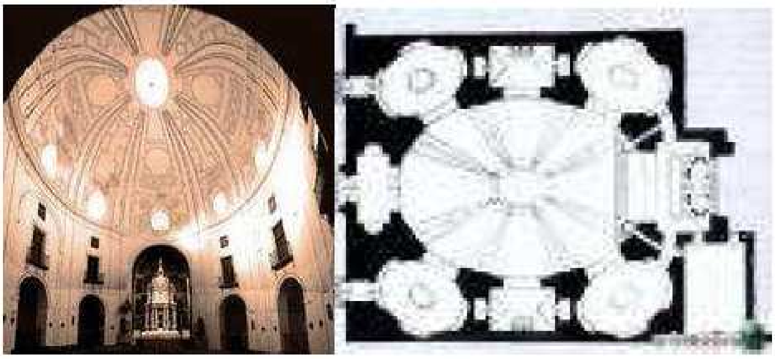
Las formas arquitectónicas constituyen, como las pictóricas o las escultóricas, un lenguaje que contiene la posibilidad de transmitir mensajes.

Para Rudolf Arnheim las formas tienen un determinado efecto psicológico sobre quien las contempla, efecto derivado de sus intrínsecas cualidades expresivas. Así, la línea horizontal comunica estabilidad, la vertical es símbolo de infinitud, de ascensión; una voluta ascendente es alegre, mientras que si por el contrario es descendente comunica tristeza; la línea recta significa decisión, fuerza, estabilidad, mientras que la curva indica dinamismo, flexibilidad; la forma cúbica representa la integridad, el círculo comunica equilibrio y dominio, mientras que la esfera y la semiesfera (cúpulas) representan la perfección.
La elipse, por su parte, al contar con dos centros comunica inquietud, inestabilidad.

Subestructura asociada: focos
Clasificación: público

En muchas ciudades es fácil encontrar plazas de planta elíptica, normalmente conocidas por el nombre de "plaza elíptica". Por ejemplo, en Madrid y Bilbao existen plazas de este tipo. Sin embargo, la plaza de planta elíptica más famosa en el mundo probablemente sea la Plaza de San Pedro en el Vaticano.

También podemos encontrar edificaciones con planta elíptica. Un ejemplo es la iglesia del Monasterio de San Bernardo, más conocido por "Las Bernardas" en Alcalá de Henares. Un templo con una única nave y planta elíptica, con cúpula del mismo trazado. En sus muros se abren seis capillas, cuatro de ellas también de planta elíptica, con diferentes tamaños de sus portadas.



Monasterio de San Bernardo, "Las Bernardas", en Alcalá de Henares

Igualmente, se utiliza la propiedad reflectante de la **elipse** en la acústica con el objeto del diseño y construcción de "galerías de murmullos": si la forma de la cúpula de un auditórium o de una galería es elíptica, entonces un susurro o murmullo débil emitido en un foco no es casi percibido en la mayor parte del salón excepto en el otro foco.
Esto ha sido utilizado en el Salón de las Estatuas del Capitolio de Washington D.C., en el Tabernáculo Mormón en Salk Lake City, en la denominada "Galería de los Suspiros" en el Convento del Desierto de Los Leones cerca de Ciudad de México, y otras edificaciones.

En el famoso Taj Mahal, construido en el siglo XVII (16301652) en la India por el emperador Sah Yahan en honor de su esposa Mumtazi Mahall, uno de los máximos logros de la arquitectura mogol, tiene una galería de los suspiros en donde anteriormente a la pareja en luna de miel se le colocaba en los respectivos focos, de tal forma que el novio murmuraba la frase: "A la memoria de mi amada inmortal", la cual era solamente escuchada por su novia situada a una distancia de algo más de 15 m.

<u>Subestructura matemática</u>: Propiedades de simetría de la elipse.
<u>Clasificación</u>: Social.

- **LEYES DE KEPLER**

Estudiando una gran cantidad de datos experimentales, Kepler (1571 – 1630) determinó empíricamente los tres siguientes hechos sobre el movimiento de los planetas conocidos como las leyes de Kepler:

1. La órbita de cada planeta es una elipse con el sol en uno de los focos.
2. El radio vector trazado desde el sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Los cuadrados de los períodos de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de la órbita elíptica.

Newton (1642 – 1727) partiendo de estas tres leyes empíricas y utilizando elementos del cálculo diferencial e integral pudo deducir la ley de gravitación universal: "la fuerza que ejerce el sol sobre un planeta es una fuerza de atracción radial e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los dos centros del sol y del planeta y viene dada por $F = G\frac{mM}{r^2}$ donde m: masa del planeta, M: masa del sol y constante de gravitación universal".

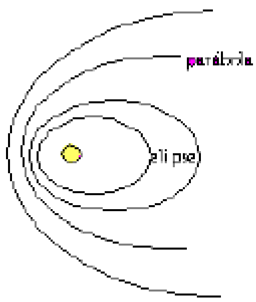
"Los planetas en su movimiento alrededor del Sol describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol" (Primera Ley de Kepler, 1609).

En la Física, la elipse y la parábola aparecen en muchas leyes importantes. Es, quizá, en la Mecánica (parte de la Física que trata del equilibrio y del movimiento de los cuerpos sometidos a cualquier fuerza) en donde la encontramos de forma más inmediata.

En el Universo, el movimiento más frecuente de estrellas, planetas, satélites, etc. es el descrito mediante trayectorias elípticas (la circunferencia es un caso particular de elipse). Esto es así porque, a grandes distancias y para objetos sin carga eléctrica neta importante, la fuerza principal que gobierna este movimiento es la Fuerza Gravitatoria.
Fue el gran físico y matemático Isaac Newton (16421727) quien formuló la Ley de la Gravitación que explica los movimientos de los planetas y satélites en el Sistema Solar.
Esta ley reúne las tres leyes de Kepler en una sola:

$$F = G\,\frac{Mm}{R^2}$$

en donde:
F = fuerza de atracción,
G = la constante de gravitación universal,
M y m = las masas del Sol y el planeta y
R = la distancia al foco de la elipse, ocupado por el Sol.



Ec: Energía Cinética

Ep: Energía Potencial

Si la energía cinética es menor en valor absoluto a la energía potencial, entonces ello quiere decir que el satélite no tiene la suficiente velocidad como para separarse de la Tierra, su trayectoria será, entonces, una curva cerrada: una elipse.

Si la energía cinética es igual a la energía potencial en valor absoluto, la elipse pasa a ser una parábola; ello quiere decir que el satélite tiene la velocidad justa para abandonar la Tierra para siempre.

Si energía cinética es mayor en valor absoluto que la energía potencial, entonces, la trayectoria sería una hipérbola, el satélite viajaría hacia el infinito.

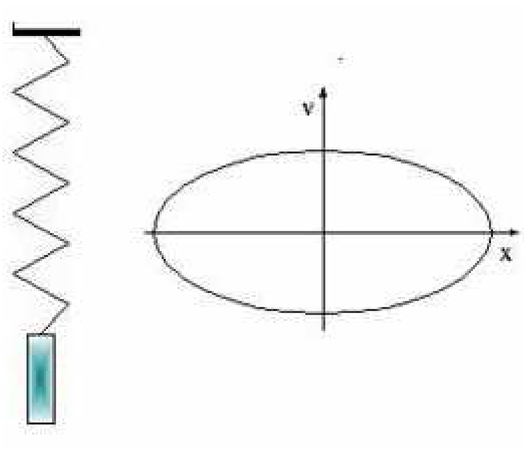
Subestructura asociada: focos
Clasificación: Científico

- **OTROS**

La elipse aparece en otras leyes de la Mecánica, además de las que se presentaban al principio del artículo, quizás no tan importantes o conocidas. La comprensión de tales leyes requiere del conocimiento de ciertos conceptos y magnitudes físicas: momentos de inercia, momento angular, velocidad angular, frente de ondas, etc.. Citaré, brevemente, algunos ejemplos.

Elipses en el movimiento armónico simple

Uno de los movimientos más importantes en la Naturaleza es el movimiento armónico simple (MAS), que es un movimiento periódico, oscilante, en torno a un punto, centro de oscilación. Por ejemplo: una masa colgando de un resorte. Si estiramos el resorte y luego lo soltamos, la masa empezará a subir y a bajar en un MAS. En este fenómeno, nos encontramos a la elipse en la representación del movimiento en el espacio de las fases, es decir, en la representación de la velocidad del peso (eje Y) frente al espacio recorrido respecto al centro de oscilación o de equilibrio (eje X).

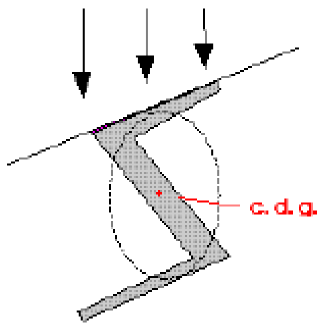


Subestructura asociada: ecuación analítica.

Clasificación: Científico.

Elipse de inercia en el sólido rígido

En el estudio del sólido rígido aparece la llamada" Elipse de Inercia". Supongamos una placa a la que podemos hacer girar en torno a ejes de rotación contenidos en la misma placa y que pasan por su centro de masas (o centro de gravedad, c.d.g.). Los puntos sobre los distintos ejes y cuya distancia al centro de masas es inversamente proporcional al cuadrado de su momento de inercia forman



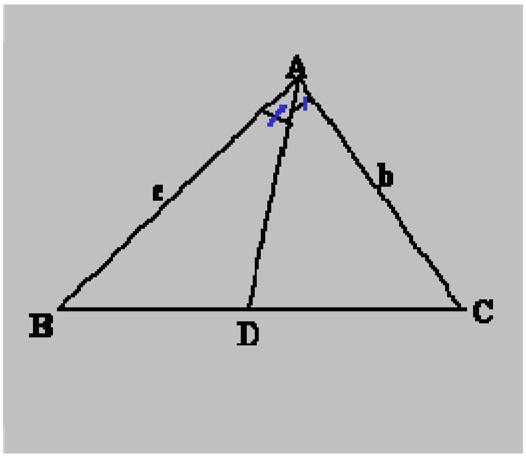
una elipse, la “Elipse de Inercia”. Esta elipse es muy importante para determinar la resistencia de los materiales (vigas, etc) a la flexión. Una barra es más resistente a la flexión en la dirección del eje mayor de la elipse de inercia de su sección transversal.

Las flechas representan la carga sobre la viga.

Subestructura asociada: ecuación.
Clasificación: Científico.

- **PROPIEDAD ÓPTICA**

En geometría plana se demuestra el siguiente resultado: Si se tiene un triángulo *ABC* y un punto *D* sobre *BC* entonces:



$\overline{AD}$ es bisectriz del ángulo.

$$BAC \Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{c}{b}.$$

Esta propiedad permite construir la normal y por ende la tangente en un punto cualquiera de la elipse.

Al unir el punto *P1* de la elipse con *F'* y con *F*, puede demostrarse que la bisectriz del ángulo *F'P1F* es la normal *nn* a la curva por *P1*.Esta propiedad se conoce como la propiedad óptica o focal de la elipse y tiene interesantísimas aplicaciones como en la construcción de conchas acústicas y salas.

Subestructura asociada: distancia focal.
Clasificación: Científico.

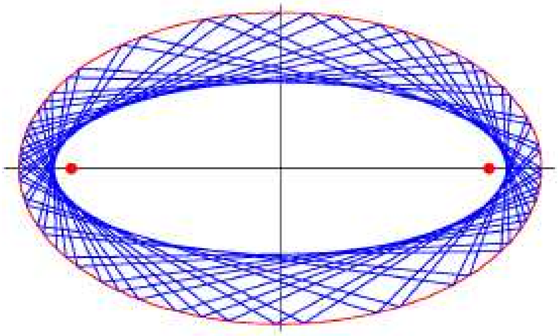
- **AVIONES**

Debido a la resistencia del viento, las trayectorias que realizan los aviones cuando hacen viajes circulares se vuelven elípticas.

Subestructura asociada: lugar geométrico.
Clasificación: laboral.

➢ MESA BILLAR

Tracemos la recta tangente a cualquier cónica en cualquiera de sus puntos. En el caso de la elipse y de la hipérbola, tracemos además las rectas que unen dicho punto con los focos. Entonces se demuestra que los ángulos (agudos) que forman esas dos rectas con la recta tangente son iguales. Otra forma de expresar este hecho es que, si se dirige un rayo partiendo de uno de los focos, al reflejarse en la figura sigue en una dirección que pasa por el otro foco.



Subestructura asociada: Recta tangente y focos
Clasificación: personal

➢ FORMAS

Conseguir una parábola y una elipse mediante una lámpara.

La parábola

La elipse

Clasificación: Personal

3.5 . ¿QUÉ EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE TENEMOS?

Prioridades de aprendizaje:

Las prioridades de aprendizaje para este tema son los siguientes:

1. Identificar las diferentes cónicas no degeneradas
2. Analizar las posiciones relativas y las rectas notables
3. Representar cónicas gráficamente

A continuación desgranamos estas prioridades:

I Identificar las diferentes cónicas no degeneradas

- Definir lugar geométrico y las diferentes cónicas como tales.
- Identificar los diferentes elementos de las cónicas y describir cómo influyen en la clasificación de éstas.
- Relacionar cada cónica con sus distintas ecuaciones y obtener éstas a partir de varios elementos o propiedades.
- Distinguir las diferentes secciones del cono que dan lugar a las distintas cónicas.

II Analizar las posiciones relativas y las rectas notables

- Hallar la recta tangente y la recta normal a una cónica en un punto de ésta.
- Determinar posiciones relativas entre recta y cónica.

III Representar cónicas gráficamente

- Construir gráficamente las cónicas usando programas de geometría dinámica.
- Relacionar las ecuaciones de las cónicas con su representación gráfica y viceversa.
- Identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos.

Seguidamente hacemos un estudio detallado de las competencias de PISA a las que contribuye cada objetivo:

	Identificar las diferentes cónicas no degeneradas	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Definir lugar geométrico y las diferentes cónicas como tales.	☆		☆					
2	Identificar los diferentes elementos de las cónicas y describir cómo influyen en la clasificación de éstas.		☆	☆					☆
3	Relacionar cada cónica con sus distintas ecuaciones y obtener éstas a partir de varios elementos o propiedades.	☆	☆		☆		☆	☆	
4	Distinguir las diferentes secciones del cono que dan lugar a las distintas cónicas.						☆		☆

	Analizar las posiciones relativas y las rectas notables	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
5	Hallar la recta tangente y la recta normal a una cónica en un punto de ésta.				☆	☆		☆	
6	Determinar posiciones relativas entre recta y cónica.				☆	☆		☆	☆

	Representar cónicas gráficamente	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
7	Construir gráficamente las cónicas usando programas de geometría dinámica.	☆	☆				☆		☆
8	Relacionar las ecuaciones de las cónicas con su representación gráfica y viceversa.	☆	☆				☆		
9	Identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos.			☆	☆	☆		☆	

Balance final	4	4	3	4	3	4	4	4

A continuación, justificaremos brevemente la elección que hemos hecho de las competencias:

1) ***Definir lugar geométrico y las diferentes cónicas como tales.***

   PR: Hay que distinguir entre las diferentes cónicas y conocer sus diferentes definiciones matemáticas.
   C: Se expresan usando ideas matemáticas.

2) ***Identificar los diferentes elementos de las cónicas y describir cómo influyen en la clasificación de éstas.***

   AJ: Elabora argumentos de clasificación de las cónicas en base a sus elementos.
   C: Describen cómo influyen los elementos en cada una de las cónicas, qué características les aportan para su clasificación.
   HT: Usando programas informáticos y juegos, se pueden modificar los diferentes elementos tras apreciarlos y moverlos para ver qué ocurre.

3) ***Relacionar cada cónica con sus distintas ecuaciones y obtener éstas a partir de varios elementos o propiedades.***

PR: Ofrece distintos elementos según el tipo de ecuación que nos ofrezcan de éstos. Debe conocer las diferentes ecuaciones, tanto entre cónicas, como las distintas formas dentro de una misma cónica.
AJ: Justifica en qué se basa para establecer relaciones entre cónica y ecuación.
M: Expresan matemáticamente un problema y usa procesos matemáticos para resolverlo.
R: Interpretan, relacionan formas diferentes de representación.
LS: Manejan enunciados y expresiones con símbolos matemáticos.

4) ***Distinguir las diferentes secciones del cono que dan lugar a las distintas cónicas***.

R: Interpretan las diferentes secciones del cono como un sistema más de representación.
HT: Podemos usas las herramientas tecnológicas para visualizar las secciones.

5) ***Hallar la recta tangente y la recta normal a una cónica en un punto de ésta.***

M: Expresan matemáticamente este tipo de problemas.
RP: Resuelven y plantean problemas sobre las rectas notables asociadas a las cónicas.
LS: Utilizan variables, resuelven ecuaciones, comprenden cálculos.

6) ***Determinar posiciones relativas entre recta y cónica.***

M: Estructuran y analizan un problema.
RP: Resuelven y plantean problemas sobre posiciones relativas en el plano.
LS: Uso de las representaciones simbólicas de recta, cónica, distancia.
HT: Útil para ver la representación gráfica y comprobar el resultado obtenido analíticamente.

7) ***Construir gráficamente las cónicas usando programas de geometría dinámica.***

PR: Tienen que seleccionar los elementos relevantes para la construcción de cada cónica y elegir un método de construcción apropiado.
AJ: Deben justificar por qué eligen un determinado método y argumentar cada paso que dan.
R: Diferentes formas de representación.
HT: Conocer y saber utilizar las diferentes herramientas para poder usarlas.

8) ***Relacionar las ecuaciones de las cónicas con su representación gráfica y viceversa.***

PR: Deben utilizar conceptos y procedimientos matemáticos para establecer la relación.

AJ: Justificar los cálculos y el método para establecer dicha relación.
M: Expresen y estructuren matemáticamente un problema inicial.
R: Decodifiquen, interpreten distintas formas de representar.

9) ***Identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos.***

C: Expresan ideas acerca de la matemáticas.
RP: Resuelven y analizan problemas.
LS: Traducen problemas al lenguaje matemático y luego interpretan el resultado matemático dentro del contexto del problema.

3.6 . ¿QUÉ LIMITACIONES PUEDEN SURGIR EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE?

En el estudio de este tema, las mayores dificultades se localizan en diferentes ámbitos. Por un lado, existen numerosas y diferentes representaciones para un mismo concepto que se interrelacionan entre sí. Por otro lado, deben tener un cierto grado de desarrollo de la visión espacial ya que ayuda bastante a la comprensión de los contenidos y procedimientos que se llevarán a cabo para la consecución de los objetivos. Hay que señalar también que se necesita una cierta soltura a la hora de realizar cálculos algebraicos, ya que estarán presentes en el desarrollo de la unidad.

En el siguiente cuadro mostramos los errores y dificultades que creemos que pueden surgir, señalando su relación con los objetivos anteriores:

ERRORES Y DIFICULTADES	OBJETIVOS ASOCIADOS
1. No reconocer las cónicas como secciones del cono.	1 y 4
2. No percibir la presencia de las cónicas en la vida y naturaleza.	9
3. Dificultad para identificar los elementos de la cónica en su representación gráfica.	2,7 y 8
4. Desconexión entre los distintos sistemas de representación.	3,4,5,6,8 y 9
5. Incapacidad de identificar problemas relacionados con cónicas y resolverlos.	5,6 y 9
6. Manejo inadecuado de cálculo y de expresiones algebraicas.	2,3,5,6 y 9
7. Falta de visión espacial.	1,4,5,6 y 9
8. Deficiencia de conceptos geométricos previos (distancias, recta normal, perpendicularidad,…)	5,6 y 7

3.7 . METODOLOGÍA

Pretendemos introducir al alumnado en el mundo de las Matemáticas a través de la utilización práctica de las mismas. Se dará protagonismo al alumno/a, basándonos en el hecho de que si el escolar descubre los conceptos por sí mismo éstos se asientan de manera más duradera en su estructura lógica.

La metodología que se seguirá será activa, con varias exposiciones teóricas y realización de numerosas actividades y ejercicios que permitirán que los alumnos/as de una forma progresiva afiancen los nuevos conceptos y técnicas matemáticas.

Se procurará atender a la diversidad de la clase. Para ello se entregarán ejercicios y actividades de refuerzo o ampliación.

También se motivará la participación en clase ya que se pretende que los escolares tengan una actitud abierta y crítica.

Finalmente, se potenciarán todas las actividades que sirvan para conectar la materia con otras asignaturas que curse el alumno/a, y con su vida cotidiana.

De manera general, el esquema metodológico de las sesiones será el siguiente:

- Realización en la pizarra de alguna tarea propuesta y aclaración de dudas del día anterior.
- Explicación de los conceptos matemáticos.
- Presentación de un problema que ejemplifique los contenidos a tratar en la sesión.
- Uso del ordenador para la representación gráfica de las cónicas o realización de alguna tarea como trabajo para casa.

3.8 . EVALUACIÓN

A medida que las Matemáticas han ido evolucionando se han convertido en un lenguaje universal y sumamente eficaz, que sigue desarrollándose con la resolución de problemas prácticos.

Adquirir conocimientos matemáticos supone no sólo llegar a conseguir resultados finales y concretos, sino dominar todo el proceso seguido hasta obtenerlos.

Las Matemáticas tienen un valor formativo que trasciende su propio ámbito: fomentan en el alumnado la creatividad, los hábitos de indagación, la visión amplia de la realidad o la capacidad de enfrentarse a situaciones desconocidas e imprevistas.

La evaluación es parte integrante y fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje. Requiere obtener información de manera sistemática, que permita al profesor/a emitir un juicio valorativo sobre el ritmo del proceso de aprendizaje, en aspectos parciales y globales del mismo.

Evaluar no es tarea fácil, sobre todo en lo relativo a aprendizajes a largo plazo. La evaluación debe extenderse no sólo a la adquisición de rutinas y hechos aislados, sino que debe recoger otros contenidos, como los actitudinales y los procedimientos de tipo general. Esto último modifica la elección de técnicas e instrumentos aconsejables para la evaluación.

Para describir el sistema de evaluación que emplearemos en nuestra propuesta de unidad didáctica, en primer lugar enunciamos los criterios de evaluación seleccionados, a continuación detallamos los instrumentos de evaluación que emplearemos y, finalmente, describimos los criterios de calificación de algunos de esos instrumentos.

Criterios de evaluación

Al término de la implementación de la unidad didáctica, nos interesa obtener información del grado de consecución, por parte del alumnado, de las siguientes capacidades:

- Comprender el concepto de lugar geométrico y el de sección cónica.
- Manejar el concepto de lugar geométrico en el plano, aplicándolo a las cónicas.
- Obtener las ecuaciones de las cónicas.

- Clasificar las cónicas.
- Hallar la posición relativa de una recta y una cónica.
- Calcular e identificar los elementos más característicos de una cónica (focos, vértices, ejes, asíntotas,...) a partir de su expresión gráfica o analítica.
- Obtener la ecuación y gráfica de la cónica a partir de algunos elementos de la misma.
- Obtener la gráfica de la cónica a partir de la ecuación de esta.
- Resolver problemas de la vida cotidiana relacionados con las cónicas e interpretar gráficamente su resultado.
- Realizar investigaciones en las que haya que seleccionar e identificar las cónicas en distintas situaciones de la vida real.
- Utilizar recursos informáticos y tecnológicos para procesar y comprender gráficamente la información obtenida de las cónicas.

Estas capacidades, sintetizan el conjunto de objetivos de aprendizaje que hemos descrito anteriormente. Asimismo, brindan información acerca del desarrollo de las competencias que hemos destacado en nuestra programación: pensar y razonar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas y representar.

Instrumentos de evaluación

La variedad de capacidades a evaluar que hemos propuesto y su diferente nivel de complejidad, hace que no se deba pretender evaluar todo a través de un mismo tipo de prueba. Por tanto, utilizaremos diversos instrumentos de recogida de información, como son los siguientes:

- **La observación** directa de la actividad del alumno/a, de su interés y de su comportamiento ante el trabajo y ante el equipo (la actitud se evalúa principalmente a través de este método).
- **La corrección de los trabajos** de los alumnos/as, individuales o colectivos.
- **La revisión del trabajo diario**, de forma aleatoria y sistemática a lo largo de la evaluación.
- **Pruebas específicas** de evaluación, individuales de adquisición, consolidación y progreso de conocimientos.

Los alumnos/as realizarán una prueba al finalizar del tema y tendrán también la posibilidad de hacer recuperaciones. El aprobado del tema supondrá que el alumno/a ha alcanzado los objetivos fijados.

Criterios de calificación

La nota final del tema se confeccionará con los siguientes criterios:

- Prueba individual: 70%
- Trabajo diario y actitud: 10%
- Trabajo escrito: 20%

Para la calificación de la prueba o trabajo escrito, se tendrán en cuenta los siguientes aspectos:

- Presentación: Limpia, clara, legible y ordenada.
- Planteamiento: El adecuado al enunciado del problema.
- Desarrollo:
    - Utilización correcta de la notación (las igualdades, las desigualdades, los paréntesis, las implicaciones,...).
    - Los errores graves, que impliquen desconocimiento de nociones fundamentales, conllevarán la no puntuación en el apartado o problema.
- Resultado: Los resultados se expresarán lo más simplificado posible.
- Comentario o conclusión, si procede.

Un ejercicio se considerará totalmente correcto siempre y cuando, contemple todos los apartados anteriores.

4. DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

La unidad didáctica está dirigida a alumnos/as de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. En ella pretendemos transmitir al alumnado la importancia de "Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas" que se presentan en situaciones de la vida cotidiana sin que las reconozcamos como tales la mayoría de las veces. Presentaremos los distintos tipos que existen, sus propiedades, elementos que las caracterizan, posiciones relativas y aplicaciones.
Nuestra unidad didáctica se fundamenta en el análisis didáctico anterior, la descripción de los objetivos y contenidos y, la estructuración de las sesión que se van a trabajar en el aula.

4.1 . OBJETIVOS DE ETAPA

El bachillerato contribuirá a desarrollar en el alumnado los saberes, las capacidades, los hábitos, las actitudes y los valores que les permitan alcanzar, además de los objetivos enumerados en el artículo 33 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, del Ministerio de Educación y Ciencia, los siguientes:

a) Las habilidades necesarias para contribuir a que se desenvuelvan con autonomía en el ámbito familiar y doméstico, así como en los grupos sociales con los que se relacionan, participando con actitudes solidarias, tolerantes y libres de prejuicios.
b) La capacidad para aprender por sí mismo, para trabajar en equipo y para analizar de forma crítica las desigualdades existentes e impulsar la igualdad, en particular, entre hombres y mujeres.
c) La capacidad para aplicar técnicas de investigación para el estudio de diferentes situaciones que se presenten en el desarrollo del currículo.
d) El conocimiento y aprecio por las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades, así como entender la diversidad lingüística y cultural como un derecho y un valor de los pueblos y los individuos en el mundo actual, cambiante y globalizado.

e) El conocimiento, valoración y respeto por el patrimonio natural, cultural e histórico de España y de Andalucía, fomentando su conservación y mejora.
f) Ejercer la ciudadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa y favorezca la sostenibilidad.
g) Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.
h) Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades existentes e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas con discapacidad.
i) Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.
j) Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su comunidad autónoma.
k) Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.
l) Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.
m) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.
n) Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.
o) Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.
p) Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.
q) Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.
r) Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.
s) Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial.

Destacaremos aquellos que se encuentran más vinculados con las matemáticas y/o con nuestro tema:

- La capacidad para aprender por sí mismo, para trabajar en equipo y para analizar de forma crítica las desigualdades existentes e impulsar la igualdad, en particular, entre hombres y mujeres.
- Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.
- Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su comunidad autónoma.

- ✸ Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.
- ✸ Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.
- ✸ Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.
- ✸ Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.

4.2 . OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Prioridades de aprendizaje:

Las prioridades de aprendizaje en las que nos hemos centrado para esta unidad son las siguientes:

1. Identificar las diferentes cónicas no degeneradas
2. Analizar las posiciones relativas y las rectas notables
3. Representar cónicas gráficamente

A continuación desgranamos estas prioridades en otras más específicas:

A. Identificar las diferentes cónicas no degeneradas

- Definir lugar geométrico y las diferentes cónicas como tales.
- Identificar los diferentes elementos de las cónicas y describir cómo influyen en la clasificación de éstas.
- Relacionar cada cónica con sus distintas ecuaciones y obtener éstas a partir de varios elementos o propiedades.
- Distinguir las diferentes secciones del cono que dan lugar a las distintas cónicas.

B. Analizar las posiciones relativas y las rectas notables

- Hallar la recta tangente a una cónica en un punto de ésta.
- Determinar posiciones relativas entre recta y cónica.

C. Representar cónicas gráficamente

- Construir gráficamente las cónicas usando programas de geometría dinámica.
- Relacionar las ecuaciones de las cónicas con su representación gráfica y viceversa.
- Identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos.

4.3 . CONTENIDOS

En consonancia con los objetivos anteriormente presentados, los contenidos que trabajaremos serán:

4.3.1 CONCEPTUALES:

- Lugar geométrico.
- Sección cónica. Cónicas.
- Ecuación general y ecuación cartesiana.
- Excentricidad, foco, centro, vértices, ejes de simetría, distancia focal y asíntotas.
- Circunferencia.
- Parábola.
- Elipse.
- Hipérbola.
- Posición relativa: recta tangente, recta secante y recta exterior.

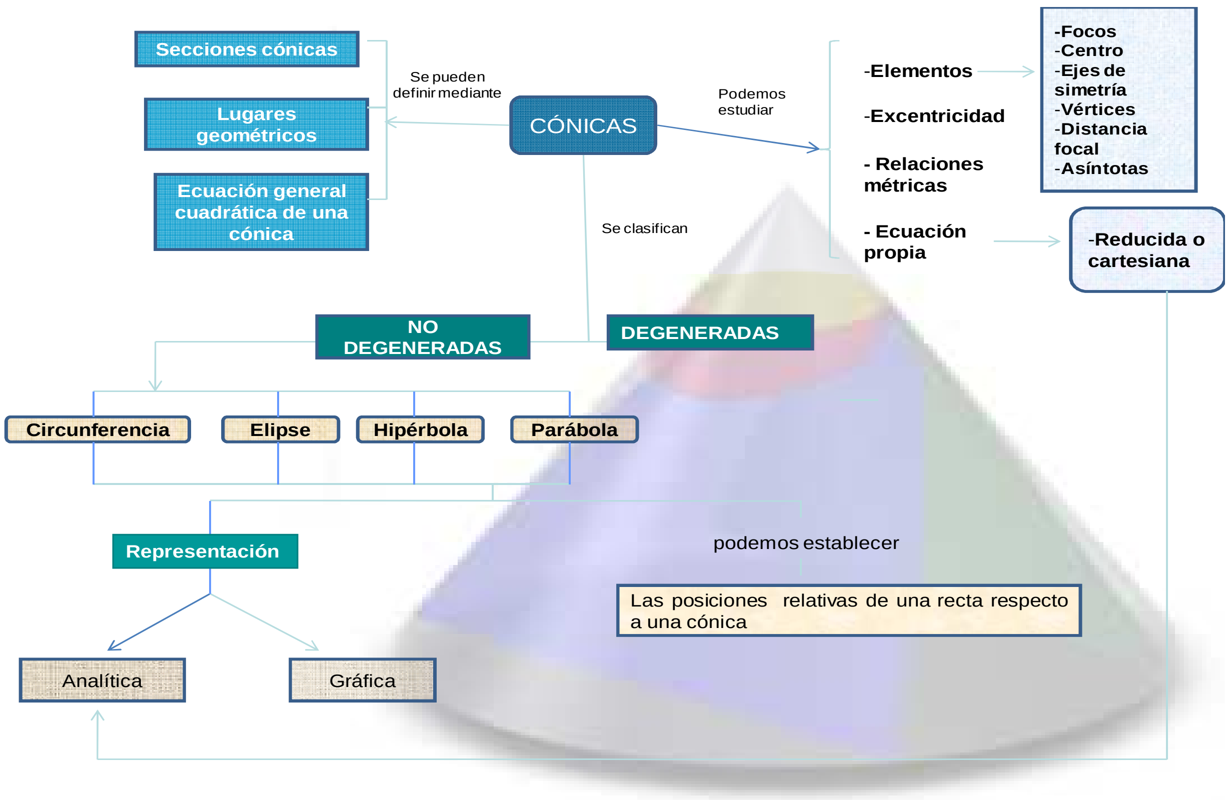
4.3.2 PROCEDIMENTALES:

- Manipulación directa con el cono.
- Interpretación de las relaciones entre cada figura y ángulo de cada sección.
- Interpretación y relación de cada idea de lugar geométrico con la cónica asociada.
- Representación de una cónica a partir de ecuación analítica.
- Deducción de ecuaciones a partir de la gráfica.
- Diferenciación del tipo de cónica a partir de su fórmula.
- Resolución de problemas de construcción de las cónicas a partir de diferentes datos.
- Identificación de los elementos de una determinada cónica (centro, focos, vértice,..).
- Relación de distintas figuras con sus propiedades (excentricidad, asíntotas).
- Cálculo de la recta tangente a partir de la ecuación simbólica.
- Comprensión de las posiciones relativas entre recta y cónica.
- Representación de la idea de tangencia, así como la de secante y la de exterior.
- Construcción de una cónica a partir de información meramente verbal o textual (a través de la idea de lugar geométrico). Bien sea gráficamente o con recursos tecnológicos.

4.3.3 ACTITUDINALES:

- Interés por encontrar la figura geométrica que forman los puntos que cumplen una propiedad.
- Gusto por la construcción de cónicas.
- Limpieza y gusto por la exactitud en el trazado de cónicas.

Todos estos contenidos quedan expresados mediante el siguiente mapa conceptual, que surge como simplificación del mapa procedente del análisis didáctico.



4.4 . DESCRIPCIÓN DE LAS SESIONES DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En esta unidad, básicamente pretendemos que los alumnos/as conozcan las cónicas mediante sus elementos, su construcción o en presencia de la vida cotidiana. En vez de realizar una sola sesión de motivación, hemos decidido ir motivando, recordando, afianzando y ampliando cada concepto a lo largo de la unidad. Cada sesión la vamos a terminar adelantando, con problemas interesantes, lo que veremos en la siguiente sesión, de forma que el alumnado venga motivado y habiendo recordado algo, por lo que les será más fácil seguir la clase y participar en ella.

Además, en cada sesión participarán los alumnos realizando actividades en la pizarra e incluso explicando conceptos a partir de éstas. Pretendemos en principio que en estas intervenciones el profesor intervenga lo mínimo, intentando que los alumnos/as se corrijan entre ellos. Además, intentaremos que vean las cónicas desde otro punto de vista, proponiendo que sean capaces de inventar y redactar problemas relacionados con ellas además de resolverlos. Todo esto lo observaremos y lo tendremos en cuenta en la evaluación (no sólo los resultados a los que lleguen, sino también la actitud participativa en clase, los intentos fallidos y la actitud crítica con los compañeros/as y con él mismo).
Realizaremos también una serie de actividades que elaborarán en grupo y entregarán al profesor/a para su posterior corrección y evaluación. Incluiremos problemas de la vida cotidiana, para resaltar la importancia de esta unidad, que se presentan en multitud de situaciones, así como actividades de otras asignaturas que están cursando simultáneamente, como pueden ser problemas de física.

Como actividades extra, propondremos dos trabajos de investigación, con el objetivo de que comiencen a familiarizarse con la biblioteca y los buscadores de internet, así como con la contrastación de la información obtenida, que en su futura vida universitaria les será muy útil.

Por ello, hemos organizado y diseñado ocho sesiones en las que abordamos diferentes facetas de nuestro tema.

SESIÓN 1	TIEMPO ESTIMADO
– Comenzaremos la sesión dándole a los alumnos/as un cono de un material de corte fácil. Plantearemos que las cónicas se obtienen por cortes del cono donde la inclinación del ángulo del plano de corte depende a la hora de obtener las diferentes cónicas. Trataremos de conseguir mediante los cortes de los alumnos/as, las cuatro cónicas. Seguidamente representaremos las cónicas obtenidas para que los estudiantes se vayan familiarizando con ellas.	20minutos
– Seguidamente construiremos junto con los alumnos/as las diferentes cónicas con un simple papel haciendo uso de la papiroflexia.	30 minutos
– Trabajo para casa: propondremos a los alumnos/as que busquen otros recursos para la obtención de las cónicas (a través de internet si así lo desean) con la finalidad de que en la próxima sesión expliquen el proceso al resto de compañeros.	5 minutos
CON ESTA SESIÓN LO QUE PRETENDEMOS ES MOTIVAR A LOS ALUMNOS EN EL ESTUDIO DE NUESTRO TEMA MEDIANTE EL ACERCAMIENTO A LA VIDA COTIDIANA.	

La actividad para obtener las cónicas mediante cortes del cono sería:

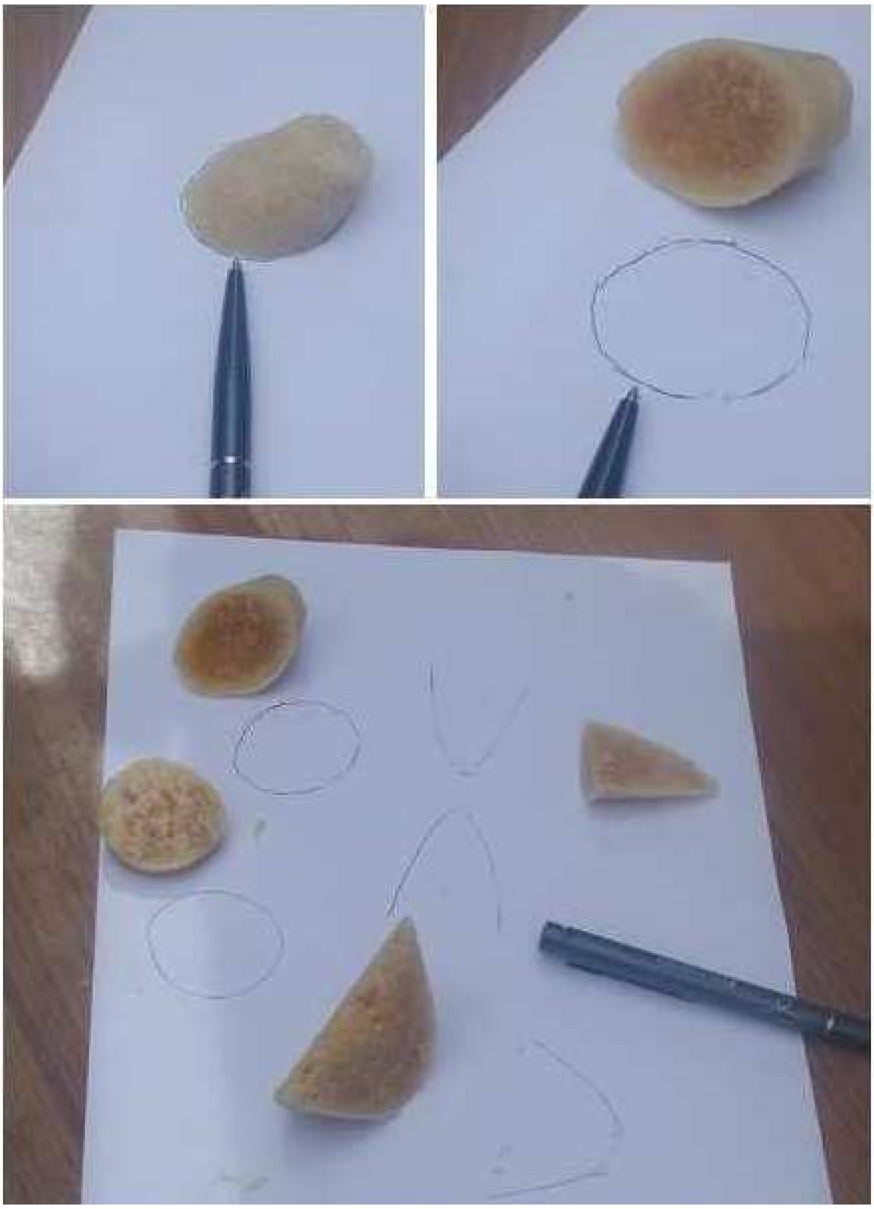
Una vez que tengamos nuestros conos, los alumnos/as comenzarán su exploración.

En esta primera tarea de contacto con el cono, se pretende que los escolares identifiquen los elementos notables del cono mediante la manipulación del mismo. Concretamente nos centraremos en identificar:
· Base
· Altura
· Vértice
· Generatriz
pues estos elementos nos servirán de ayuda en los siguientes apartados.

Una vez analizado los elementos del cono, introducimos un nuevo material: una hoja de acetato o de plástico duro.

Con estos dos elementos, se pretende determinar las posibles posiciones relativas entre el cono y el plano. Una vez establecidas y fijadas las posibles posiciones entre plano y cono, se procederá al corte del mismo, procurando cubrir todas las posibles opciones por la totalidad de la clase.

A continuación, se realizarán un balance de las secciones obtenidas por todos los alumnos/as para pasar a una clasificación según el criterio que vean más conveniente. El objetivo principal de esta tarea es que los alumnos agrupen las figuras obtenidas utilizando un criterio justificado.
Para facilitar esta labor, se recomendará dibujar en papel el contorno de las figuras obtenidas.



Por último se propone un debate de los resultados más relevantes que se han obtenido con la actividad. Las directrices de dicho debate serán las siguientes:

- Criterio de clasificación para las secciones cónicas obtenidas
- Número de clasificaciones
- Propiedades más relevantes que podemos destacar de cada una de ellas
- Relación entre las figuras obtenidas y con su procedencia del cono
- Propuesta de nombres para las secciones

Es una actividad que permite al alumno familiarizarse con las cónicas sin necesidad de ningún conocimiento previo de ellas.
Es una actividad manipulativa y cooperativa que estimamos interesante ofrecer al comienzo de la unidad o unidades dedicadas a la explicación de las figuras cónicas y sus propiedades.

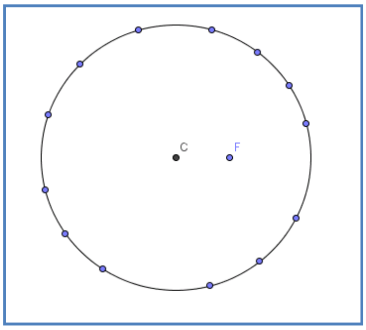
Esta actividad supone una innovación por varios motivos:

- Añade el uso de materiales manipulativos.
- Introduce una obtención física de las curvas cónicas.
- Trata a la vez temas trasversales, el reciclaje y la reutilización de materiales contaminantes.

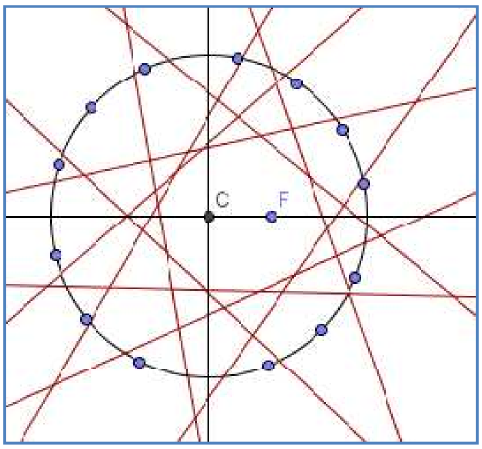
La actividad concreta de la papiroflexia sería:

Cónicas con papiroflexia.

Dibuja un círculo en un papel de radio suficientemente grande y llama al centro del círculo C. A continuación marca un punto F diferente de C en el interior del círculo y elige puntos sobre este como en la siguiente figura:



Ahora haz coincidir cada punto de los anteriores con el punto F, dobla el papel y señala el doblez con lápiz. Tu papel ha de quedar de la siguiente forma:



¿Puedes señalar en tu folio alguna figura?
Esta actividad, que utilizaremos en primer lugar, sirve de motivación para la introducción tanto de la idea de lugar geométrico en el plano como la de cónicas. Además, también nos es útil para observar los conocimientos previos que nuestros alumnos/as poseen sobre el tema.
Este ejercicio intenta despertar en el alumnado la curiosidad por el estudio de las cónicas.

SESIÓN 2	TIEMPO ESTIMADO
– Corrección de los ejercicios de casa con los alumnos/as en voz alta y expresando sus opiniones.	15 minutos
– A partir de lo anterior, introduciremos el concepto formal de cónicas como lugar geométrico además de ilustrarlo con la ecuación general de dichas cónicas. Realizar ejercicios tanto en la pizarra como en el ordenador para prácticar con los alumnos/as.	15 minutos
– Comentaremos que existen dos tipos de cónicas: las degeneradas y las no degeneradas. Estudiaremos solo el tipo de las cónicas no degeneradas. En esta sesión, solo introduciremos que existen 4 clases que son: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.	20 minutos
– Trabajo para casa: como la circunferencia ha sido estudiada en cursos anteriores, proponemos que enumeren las propiedades y los elementos de esta.	5 minutos

La actividad concreta para lugar geométrico sería:

Lugar geométrico con Geogebra.
Halla el lugar geométrico que cumplen todos los puntos del plano cuya distancia al origen de coordenadas es 5. Utiliza Geogebra para visualizar este ejercicio usando el comando "activar rastro".
¿Qué utilidad tiene la cónica anterior en la vida diaria? ¿Es importante? ¿Por qué?

Hemos comenzado mejorando la tarea que teníamos propuesta en un principio cambiando en el enunciado "ecuación" por "lugar geométrico", pues nos parece más adecuado introducir este concepto en la actividad ya que lo vamos a utilizar en la posterior comprobación de ésta con Geogebra.

Además hemos añadido la representación de las cónicas mediante herramientas tecnológicas para que el alumno/a se familiarice con ellas visualmente y reflexione sobre las posibles aplicaciones de éstas en su entorno más cercano.

SESIÓN 3	TIEMPO ESTIMADO
– Corrección de la actividad de casa, sacando a la pizarra a los alumnos/as para resolverla. Observaremos, cómo la han resuelto y si esta correcta.	10 minutos
– Por si algunos de los estudiantes no recordaba las propiedades y los elementos de la circunferencia, los repasaremos. Así como su ecuación asociada.	20 minutos
– A continuación, pasaremos a realizar actividades relacionadas con lo visto sobre la circunferencia y las corregiremos además de resolver dudas surgidas por los alumnos/as.	20 minutos
– Trabajo para casa: buscar sobre la parábola las propiedades, los elementos y su representación gráfica y analítica.	5 minutos

SESIÓN 4	TIEMPO ESTIMADO
– Corrección de la actividad de casa, sacando a la pizarra a los alumnos/as para resolverla. Observaremos, cómo la han resuelto y si esta correcta.	10 minutos
– Unidas la corrección de la actividad anterior y la realización de la explicación sobre la parábola. Propondremos problemas relacionados con esta que resolveremos pasado un tiempo junto con las dudas surgidas por los alumnos/as.	40 minutos
– Trabajo para casa: buscar sobre la elipse las propiedades, los elementos y, ecuación y representación asociada a esta.	5 minutos

SESIÓN 5	TIEMPO ESTIMADO
– Corrección de la actividad de casa en la pizarra sacando a los alumnos/as.	10 minutos
– Atendiendo a la actividad del día anterior, presentaremos más detalladamente las propiedades, elementos así como la representación gráfica y analítica de la elipse. Realizando al mismo tiempo un repaso de todo lo visto anteriormente.	20 minutos
– Ayudándose de las propiedades y elementos de las cónicas: circunferencia, parábola y elipse representaremos gráficamente estas, tanto en la pizarra como mediante el uso de un ordenador.	20 minutos
– Trabajo para casa: buscar sobre la hipérbola las propiedades, los elementos y, ecuación y representación asociada a esta.	5 minutos

SESIÓN 6	TIEMPO ESTIMADO
– Corrección del trabajo de casa con los alumnos/as en la pizarra y aclarando todas las dudas tanto del ejercicio como de la sesión anterior.	15 minutos
– Expondremos detalladamente las propiedades, asíntotas, elementos así como la representación gráfica y analítica de la hipérbola. Realizando de nuevo un breve repaso de todo lo visto recientemente.	30 minutos
– Ayudándose de las propiedades y elementos de la hipérbola representaremos gráficamente estas, tanto en la pizarra como mediante el uso de un ordenador.	10 minutos

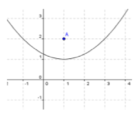
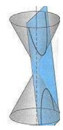
– Daremos al alumnado una relación de problemas en los que se mezclen los distintos tipos de cónicas vistas a lo largo de la unidad, la realizarán en grupos de tres en la próxima sesión, y deberán entregarla al profesor/a para su posterior evaluación.

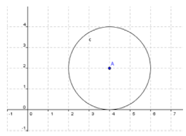
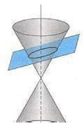
5 minutos

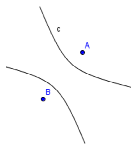
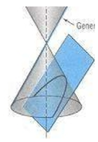
Una de estas actividades sería:

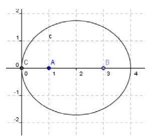
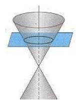
<u>**Sistemas de representación y fenomenología de las cónicas**</u>

Relaciona los siguientes elementos y justifica en qué te basas para establecer dicha relación.

Elipse $(x-4)^2+(y-2)^2=4$   

Parábola $x^2-2x-4y=-5$   

Hipérbola $(x-4)^2-3y^2=1$   

Circunferencia $2x^2+3y^2=6$   

Es muy intuitiva y visual y además ofrece una amplia diversidad a la hora de realizarla, ya que se puede proponer en grupo, para realizarla de forma oral, etc.

Implica el conocimiento de las diferentes cónicas, de sus elementos, sus representaciones, en definitiva con ella hacemos un estudio global de todo lo que se ha explicado.

Hemos elegido ésta porque es una actividad completa ya que incluye otros tipos de representaciones donde se incluyen el uso de éstas en la vida cotidiana. Por otra parte es muy compleja ya que todos los elementos que aparecen no tienen por qué estar relacionados, lo cual requiere una mayor reflexión.

SESIÓN 7	TIEMPO ESTIMADO
– Dejaremos la primera parte de la clase para que elaboren por grupos la relación de problemas que entregamos en la sesión anterior, prestando ayuda cuando sea necesario y observando en que dudan y fallan más.	25 minutos
– Realizaremos más actividades de repaso teniendo en cuenta en lo que más erran los alumnos/as, de cara a la prueba final de la unidad.	20 minutos
– Aclararemos que los alumnos/as deberán realizar un trabajo sobre “La utilidad de las cónicas en la realidad” que deberán entregar la semana próxima. La finalidad de este trabajo es que los estudiantes observen por ellos mismos las aplicaciones y la importancia de las cónicas en la vida cotidiana.	10 minutos

SESIÓN 8	TIEMPO ESTIMADO
– Realización de una prueba final, compuesta por ejercicios metódicos sobre cónicas como cálculo de sus elementos, obtención de su fórmula y representación de ellas gráficamente, intentando incluir la mayoría de los tipos de cónicas que hay. También incluiremos problemas que los alumnos/as deberán traducir al lenguaje algebraico, resolver e interpretar sus soluciones como por ejemplo la determinación de la posición relativa de la cónica con respecto a una recta.	55 minutos

EXAMEN

Ejercicio 1: Halla la ecuación que cumplen todos los puntos cuya distancia al origen de coordenadas es 5.

Ejercicio 2: Estudiar la posición de la circunferencia

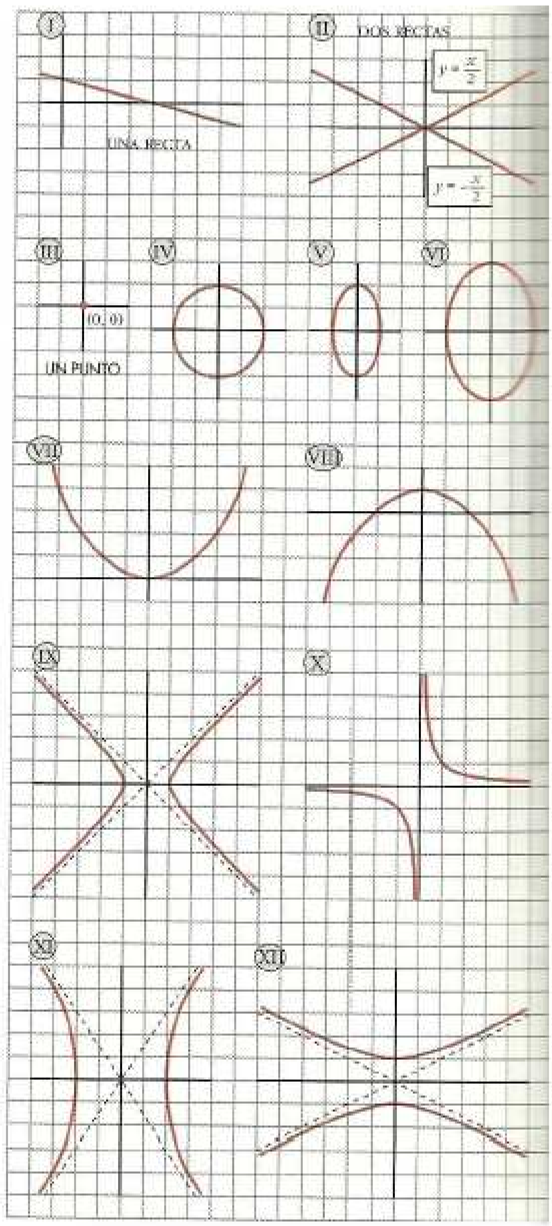
$$C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

con respecto de cada una de las rectas:

$$r: 3x - 4y - 26 = 0$$
$$s: 5x - 8y + 60 = 0$$
$$t: 3x - 4y - 1 = 0$$

¿Cómo has llegado a la solución?

Ejercicio 3: Asocia cada una de las siguientes ecuaciones a una de las gráficas que se dan a continuación, justificando dicha relación:



$a)\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ $\qquad b)\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

$c)\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ $\qquad d)\ \frac{x}{4} + y = 1$

$e)\ \frac{x^2}{4} + y = 1$ $\qquad f)\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

$g)\ y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ $\qquad h)\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 0$

$i)\ \frac{x^2}{4} - y^2 = 0$ $\qquad j)\ \frac{x^2}{4} - y = 0$

$k)\ x^2 - y^2 = 1$ $\qquad l)\ x.y = 1$

Ejercicio 4: La órbita que describe la Tierra alrededor del Sol es una cónica de excentricidad 0.017 y semieje mayor 149.60 millones de kilómetros. Calcula:
a) La longitud del semieje menor.
b) Sabiendo que el Sol está situado en uno de los focos, halla la máxima y la mínima distancia que lo separan de la Tierra.

¿POR QUÉ HEMOS ELEGIDO ESTE EXAMEN?

El porqué de ésta y no otra elección responde a razones de contenido, de tipo cognitivo así como funcionales, ya que tras un detallado estudio, hemos llegado a la conclusión de que dicho orden se ajusta, de manera bastante adecuada, a cada uno de los siguientes criterios:

Los contenidos

Desde el punto de vista de los contenidos, el aprendizaje de las cónicas comienza con la idea de lugar geométrico en el plano, continúa con el análisis de la circunferencia y sus posiciones relativas con respecto a una recta y posteriormente se presentan el resto de cónicas, sus elementos y propiedades (secuencia de contenidos extraída de libros de texto para 1º Bachillerato de Anaya y para 2º Bachillerato de Guadiel). Es natural entender que la generalización a través de la resolución de problemas es posterior a la exposición de las bases del contenido.
En virtud de los procedimientos estamos pasando de un ejercicio sencillo en cálculos a otro algo más complejo pero mecánico y que añade interpretación a la actividad de cálculo. En la tercera tarea cabe destacar que posee distintas vías de trabajo para encontrar soluciones, incluyendo cálculos, dominio en el uso de las propiedades de las cónicas y relaciones entre diversos sistemas de representación. La tarea final se basa en la aplicación física de los contenidos, con procedimientos de interpretación, aplicación y cálculo.

La Complejidad

Podemos destacar aquí que las tareas siguen un orden creciente de complejidad empezando con una tarea de reproducción ya que se trata de cálculos y procedimientos rutinarios, siguiendo con dos de conexión debido a que se trata de interpretar y solucionar problemas estándar y terminando con el problema de la órbita de la Tierra que es de reflexión puesto que requiere una interpretación y comprensión más profunda.

Los objetivos

Las tareas abordan diversos objetivos específicos de nuestro tema, por ello, hemos creído razonable colocar primero aquella que participaba más del primer bloque de éstos: “identificar las diferentes cónicas no degeneradas” (según los tres bloques en que los hemos organizado). La segunda tarea trabaja objetivos del segundo bloque: “analizar las posiciones relativas y las rectas notables”. En la tercera, y a modo de síntesis, estamos trabajando objetivos del primer y tercer bloque este último denominado “representar cónicas gráficamente” y en la última se trabaja directamente el último de los objetivos específicos que encontramos en el análisis cognitivo (“identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos”), además de englobar algunos de los procedimientos y contenidos de los objetivos anteriores.

Competencias PISA

A nivel de competencias, la secuenciación, si no completa, engloba un alto número de ellas. Y entendemos natural trabajar en las primeras tareas competencias como Pensar y Razonar, Representar, Argumentar y Justificar y el Lenguaje Simbólico tan presente en este tema y dejar para la tarea final el trabajo de las competencias de Modelizar y Resolución de Problemas debido a que se crean modelos matemáticos para resolver situaciones de la realidad.

Errores y limitaciones

En cuanto a la detección de errores y limitaciones destacar que la tercera tarea ayuda a reconocer errores de concepto y procedimientos. Además, nos permite realizar un estudio global para evaluar el estadio del proceso enseñanza-aprendizaje. En la cuarta tarea podemos trabajar directamente con la limitación tan clara que sufren los alumnos/as para detectar la presencia de las cónicas en la ciencia y en la naturaleza.

Funcionalidad

Por último argumentaremos por qué razones, en lo que a funcionalidad de tareas se refiere, hemos elegido este orden de secuenciación. Nos ha parecido beneficioso para el aprendizaje comenzar con una tarea más basada en elaborar y construir, para ir así descubriendo el tema conjuntamente. Hemos creído oportuno continuar con ejercicios que sirvan para practicar y ejercitar habilidades y terminar con tareas de síntesis, que en este caso son de dos diferentes tipos pero ambas requieren ya una idea global de contenidos y procedimientos.

5. CONCLUSIÓN

La propuesta que hemos realizamos es un modelo de enseñanza aprendizaje en el ámbito escolar que se apoya en las nuevas tecnologías con el fin de aprovechar la potencialidad de las mismas en relación a los grados de motivación que alcanzan en el ámbito educativo.

Se incide en las propuestas prácticas con actividades y metodología que facilitan el aprendizaje mediante el trabajo en grupo para analizar, tomar decisiones, llegar a acuerdos ante los retos que plantean las distintas actividades.

Consideramos que la enseñanza en general y las matemáticas en particular está sometida a los cambios que impone la tecnología, en la cual brilla con luz propia el tema informático. Al igual que es impensable realizar en la actualidad multiplicaciones sin la ayuda de una calculadora (aunque sepamos multiplicar), debe serlo para obtener una representación gráfica de una cónica. Esto no es fácil para el docente, entre otras cosas, por la multitud de programas que existen en un mercado cambiante como es el del software; pero el docente ha de estar preparado para sufrir estos cambios o debe estar abierto a su aprendizaje.

Además debemos destacar que al realizar las tareas hemos observado diversas relaciones entre el tema que nos ocupa (cónicas) y otros temas presentes en el currículo de bachillerato. El interrelacionar unos temas con otro ayuda tanto a intervenir con mayor profundidad en el propio, como a conseguir una visión global y una estructura general de la matemática a nivel de Bachillerato. A través de percibir unos temas dentro de otros el alumno será capaz de entender el conocimiento como un todo y la utilidad de poseer saberes previos para afrontar el aprendizaje de los nuevos. Pasaremos a detallar ejemplos que se presencia en nuestro tema de otros temas de matemáticas:

SIMETRÍA:
Dentro de los movimientos del plano hemos usado la traslación y la homotecia para observar cambios en la circunferencia (en los ejercicios planteados con el ordenador).
En cada cónica podemos encontrar al menos un eje de simetría, que además facilita su representación gráfica.

LÍMITES Y CONTINUIDAD
Podemos extraer la continuidad de la calidad de curvas continuas que tienen las cónicas.
El concepto de límite se nos presenta claramente al estudiar la representación gráfica de la hipérbola observando cómo la gráfica se aproxima a sus asíntotas.

DERIVADAS
Uno de los conceptos más representativos en el estudio de derivadas es la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva que esa función representa. La recta tangente es un elemento notable en el estudio de las cónicas, incluso la operación derivada puede usarse para detectar puntos notables de una cónica, como por ejemplo para hallar el vértice de una parábola.

ECUACIONES
La representación de las cónicas por medio de ecuaciones es fundamental y facilita enormemente el cálculo de elementos notables de ellas. Resaltar también que en los procedimientos de manipulación de cónicas es también fundamental la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones (por ejemplo para determinar posiciones relativas de recta y cónica).

Finalmente, señalaremos la importancia que tiene cada uno de los pasos que hemos ido realizando. La revisión curricular actúa como organizador para nuestra unidad didáctica, se trata de situar cada uno de los temas dentro de la legislación editada por el Ministerio y las correspondientes Conserjerías de Educación autonómicas. La estructura de los contenidos del tema debe servir de referencia pero no debe adoptarse como un esquema rígido sino que debe analizarse, ampliarse y enriquecerse. El análisis fenomenológico de los conocimientos matemáticos permite el dominio y comprensión de dichos conocimientos además de motivar al alumnado. Los sistemas de representación permiten a los estudiantes organizar su información sobre los conceptos para poder pensar en ellos, expresar su comprensión y, utilizarlos en situaciones y problemas prácticos y reales. Los errores y dificultades tienen por finalidad poner en conocimiento del docente los resultados de las investigaciones realizadas en torno a las dificultades de comprensión durante la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes (Rico, 1997). Además los objetivos didácticos establecen qué es lo que, en concreto, se pretende que adquiera el alumnado durante el desarrollo de la unidad didáctica, la metodología tiene una gran importancia por ser el conjunto de acciones que vamos a llevar a cabo en el aula y por último los criterios de evaluación son en los que el docente se fija para evaluar al alumnado y así comprobar el grado de adquisición de los objetivos.

6. BIBLIOGRAFÍA

- Ministerio de Educación y Ciencia (2007a). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. *BOE, 174*, 31680-31828.

- Ministerio de Educación y Ciencia (2007b). REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE, 266*, 45381-45477.

- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.

- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

- Libro de texto, Matemáticas II. Ed. Guadiel.

- Libro de texto, Matemáticas II. Ed. Anaya.

ANEXO

ANÁLISIS DE CONTENIDOS, COGNITIVO Y DE INSTRUCCIÓN

IDEA DE LUGAR GEOMÉTRICO EN EL PLANO. CÓNICAS.

Para confeccionar este trabajo nos hemos centrado en dar respuesta a seis preguntas que, a nuestro parecer, recogen todo el análisis que se debe hacer sobre este tema. Dichas preguntas son:

- ¿Cómo surgieron?
- ¿Qué son? ¿Cómo nos relacionamos con ellas?
- ¿Cómo pueden reconocerse?
- ¿Para qué sirven?
- ¿Qué expectativas de aprendizaje tenemos?
- ¿Qué limitaciones pueden surgir en el proceso de enseñanza-aprendizaje?

¿CÓMO SURGIERON?

Para llegar a entender completamente un concepto hay que conocer sus orígenes: cómo surgieron, cuándo, cómo, por qué, etc.

En primer lugar, podemos pensar que las formas del sol y de la luna debieron influir decisivamente en el temprano descubrimiento y consagración de la circunferencia como la forma geométrica plana más regular. Podemos encontrar construcciones arquitectónicas con esta forma a partir del siglo XIX a.C., lo que configura a la circunferencia, después de la recta, como el primer lugar geométrico conocido y utilizado por la humanidad.

Para encontrar otros nuevos, hay que esperar hasta la cultura griega de los siglos V y IV a.C. Por entonces surgen tres problemas clásicos: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. El problema de la duplicación del cubo fue el más famoso en los tiempos de los antiguos griegos. Hay dos narraciones diferentes dadas por comentadores posteriores sobre los orígenes del problema.

La primera fue transmitida por Eratóstenes. Éste, es su obra titulada Platonicus relata que, cuando el dios anunció a los delianos (este problema también se llama problema de Delos) a través del oráculo que, para deshacerse de una plaga, debían construir un altar del doble del que había, sus artesanos quedaron desconcertados en sus esfuerzos por descubrir cómo podían hacer un sólido que fuera el doble de otro sólido similar; por ello fueron a preguntarle al respecto a Platón, quien respondió que el oráculo quería decir no que el dios quisiera un altar del doble del tamaño sino que deseaba, al imponerles la tarea, avergonzar a los griegos por su descuido de las matemáticas y su desprecio por la geometría.

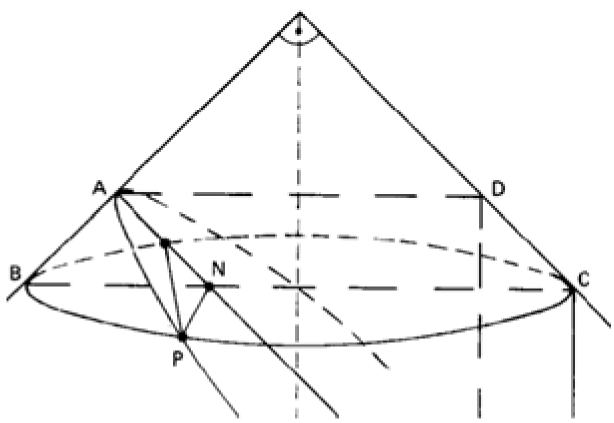
La plaga sin duda fue un evento importante en la historia de Atenas y aproximadamente un cuarto de la población murió por esta causa. Esto sucedió alrededor del 420 a.C. así

que de haber algo de verdad en esta leyenda al menos podemos dar una fecha razonablemente exacta para la aparición del problema.
Esto también es consistente con una contribución anterior de Hipócrates al problema.

Eutocio, en su comentario a *Sobre la esfera y el cilindro* de Arquímedes, dio una versión un tanto distinta. Esta se supone que es una carta escrita por Eratóstenes al Rey Tolomeo y, aunque la carta es una falsificación.

Muchos sabios y filósofos se ocuparon de la resolución de estos problemas y, aunque sin demostrarlo rigurosamente, pronto se dieron cuenta que la solución era imposible utilizando sólo la regla y el compás un número finito de veces.

En aquella época sólo se admitían dos maneras de definir curvas: con composiciones de movimiento uniformes y como intersección de superficies geométricas conocidas. Menecmo (IV a.C.) descubrió que las secciones planas de un cono servía para resolver la duplicación del cubo. Desde el siglo anterior, se conocía la cuadratura de un rectángulo. La resolución de este problema era equivalente a la resolución de la duplicación del cubo pues tomando a como la arista del cubo inicial y b=2 a, la expresión de la media geométrica ($\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$) conduce a $x^2 = ay$; $y^2 = 2ax$, es decir, $x^3 = 2a^2$ y, por tanto, x sería la longitud del cubo cuyo volumen es el doble del dado. Menecmo trató de resolver este problema hallando curva cuyos puntos verificasen las dos ecuaciones anteriores, y esto lo consiguió seccionando un cono rectángulo con un plano perpendicular a una de sus generatrices, obteniendo la parábola:

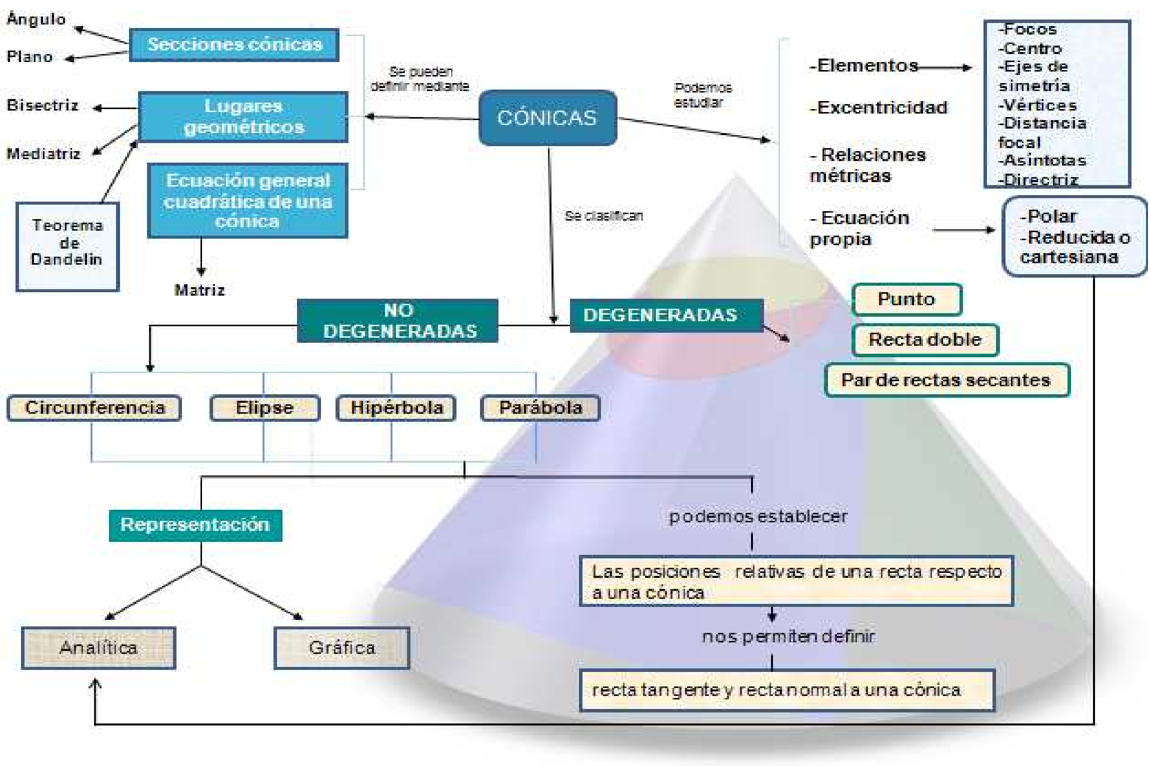


Menecmo descubrió también la elipse y la hipérbola, seccionando conos acutángulos y obtusángulos respectivamente con planos perpendiculares a una de sus generatrices.
Por esto, en esta época, estas curvas recibían el nombre de oxiotoma (elipse), amblitoma (hipérbola) y ortotoma (parábola).
Hemos señalado que Menecmo obtenía los tres tipos de curvas a partir de conos rectos de tres tipos distintos, según que el ángulo del vértice fuese agudo, recto u obtuso, y siempre tomando secciones perpendiculares a una generatriz. Años más tarde, Apolonio las obtiene utilizando un cono circular cualquiera variando la inclinación del plano secante y, a partir de esto, descubre una propiedad plana que caracteriza a cada una de las secciones, es decir, una caracterización de estas curvas como lugares geométricos.

Fue él también quien le dio el nombre que aún hoy conservamos: **elipse** viene del término griego *elleipsis* que significa insuficiencia; **hipérbola** viene de *hiperbolé* que significa exceso y **parábola** viene de *parabole* que significa equiparación (estos nombres provienen del estudio de sus ecuaciones reducidas). Apolonio también introdujo el estudio de tangencias, diámetros y rectas normales.

¿QUÉ SON? ¿CÓMO NOS RELACIONAMOS CON ELLAS?

Tras haber estudiado el origen de las cónicas y de dónde proceden, nos aproximamos al concepto en sí a través de varias vías principales.
El estudio conceptual que hemos desarrollado sobre este tema se recoge en el siguiente mapa conceptual que recoge los contenidos fundamentales que organizan el tema, y que comentaremos seguidamente.



Como se recoge en el mapa conceptual, un primer modo de definir el concepto puede ser el cono, realizando las diferentes secciones posibles y estudiando el resultado obtenido. Esta forma de presentarlas nos permite hacer una clasificación de éstas, atendiendo a si la sección contiene el punto singular del cono o no, dividiéndolas así en degeneradas (sí lo contienen) y no degeneradas (no lo contienen). Nuestro estudio se centrará en estas últimas, ya que presentan propiedades más interesantes y nos permiten realizar una investigación más profunda y caracterizarlas y expresarlas de varias formas. Son: la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.

Una segunda forma de definir las diferentes cónicas es como lugares geométricos del plano, basándonos en propiedades que caracterizan a cada uno de ellas, enriqueciendo esta presentación con la construcción gráfica de las diferentes cónicas.

Un tercer modo, y último, de definirlas es mediante sus ecuaciones cartesianas o su ecuación general, estableciendo propiedades sobre los parámetros que intervienen y que las caracterizan.

Una vez realizada la descripción matemática del tema, pasamos al estudio de numerosos elementos que intervienen en cada una de las cónicas (Focos, centro, ejes, distancia focal, excentricidad, asíntotas,..), y de sus propiedades que nos ayudan recordar las diferentes cónicas y sus características.

Así mismo, estudiamos las distintas ecuaciones,(polar, cartesiana), por las que puede venir definida una misma cónica. Además completamos el estudio con las diferentes representaciones que se pueden realizar de las cónicas, desde su construcción con regla y compás, con papiroflexia, seccionando un cono, o su representación analítica, hasta ver la cantidad de ejemplos de la vida real en las que intervienen.

Sin duda, otro procedimiento interesante para llevar en el estudio de las cónicas es el estudio de posiciones relativas, tanto entre algunas cónicas como entre cónicas y rectas, que nos permitirá definir los conceptos de recta tangente y recta normal a una cónica.

A pesar de todo, el estudio recoge en rasgos generales todo un arsenal de conceptos relacionados que se comentarán a continuación.

A la hora de interpretar, manipular y establecer relaciones con las cónicas llevamos a cabo diferentes procedimientos que podríamos agrupar en cuatro categorías generales:

Origen
Entender, interiorizar y abstraer el origen geométrico de las curvas cónicas como secciones del cono y como lugar geométrico a través de:

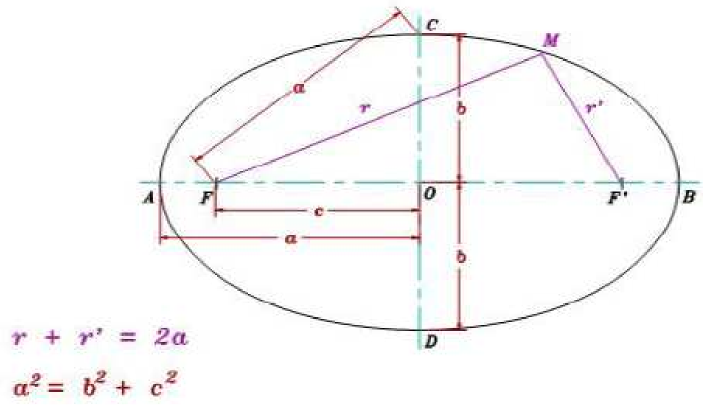
- Visualizaciones.
- Manipulación directa con el cono.
- Interpretación de las relaciones entre cada figura y ángulo de cada sección.
- Interpretación y relación de cada idea de lugar geométrico con la cónica asociada (construcción y manipulación con geogebra).
- Asociación de esta idea con fenómenos de la vida (lámpara cónica, problema del jardinero).

Fórmula
Establecer relaciones y caminos entre las distintas representaciones da cada figura. Resolución de problemas analítico-gráficos.

- Representación de una cónica a partir de ecuación polar o analítica.
- Paso de una representación simbólica a otra (polar-analítica y viceversa).
- Deducción de ecuaciones a partir de la gráfica.
- Diferenciación del tipo de cónica a partir de su fórmula.
- Resolución de problemas de construcción a partir de diferentes datos.
- Identificación de puntos notables (centro, focos, vértice,..).

- Relación de distintas figuras con sus propiedades (excentricidad, asíntotas).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Cónicas y rectas

Construir y relacionar rectas notables asociadas a las cónicas.

- Cálculo de recta tangente y normal a partir de la ecuación simbólica.
- Comprensión de las posiciones relativas entre recta y cónica.
- Representación de la idea de tangencia, así como la de secante y la de exterior.

Resolución de problemas

Resolución de problemas métricos y geométricos.

- Construcción de una cónica a partir de información meramente verbal o textual (a través de la idea de lugar geométrico). Bien se gráficamente o con el ordenador.
- Observación mediante el cálculo y la resolución de problemas aquellas cuestiones que se simplifican a través del uso de las cónicas.

Como hemos visto hay diversos procedimientos implicados y de diverso tipo. Tiene un gran peso la parte analítica pues en el trabajo con cónicas una gran parte del trabajo se hace a través de su fórmula. La parte visual, geométrica e interpretativa es también un ingrediente fundamental y aquellos procedimientos que permitan relacionar unos conceptos con otros (resolución de problemas) y los que permitan relacionar los conceptos con situaciones reales y tangibles (aplicaciones).

¿CÓMO PUEDEN RECONOCERSE?

Una vez contestadas las preguntas anteriores cabe preguntarse cómo se pueden reconocer o representar las cónicas. Hay varias formas de representar a las cónicas y las que hemos seleccionado para el nivel que corresponde a este tema son: simbólica, numérica, tecnológica, manipulativa y gráfica. Los sistemas que se presentan a continuación no son aislados o independientes. Todos ellos están íntimamente relacionados. Ejemplificamos en el caso de la elipse.

Simbólica

Este sistema de representación se basa en la identificación de una cónica a través de su ecuación. Esta ecuación puede ser de tres tipos:

- Ecuación general
- Ecuación polar
- Ecuación cartesiana

Estos tres tipos de ecuaciones no son independientes, podemos pasar de una a otra haciendo unas simples transformaciones.

Para la elipse:

➢ Ecuación general:

$$Bx^2 + Cy^2 + Dxy + Fx + Gy + H = 0.$$

con la condición de

➢ Ecuación cartesiana:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

➢ Ecuación polar:

$$\rho(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

Numérica

Una cónica se puede representar de forma numérica a través de dos maneras distintas, mediante:
Una matriz. Ésta forma está íntimamente ligada con la ecuación general de una cónica y por tanto con la forma simbólica.
La relación que las cónicas tienen con sus elementos asociados (focos, centros, excentricidades,…)

Concretamente, la forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

donde

$$a_{00} = H, \quad a_{11} = B, \quad a_{22} = C, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{D}{2}, \quad a_{01} = a_{10} = \frac{F}{2}, \quad a_{02} = a_{20} = \frac{G}{2}$$

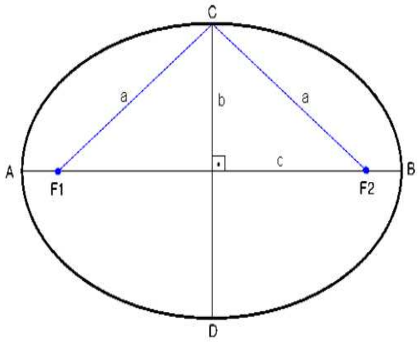
Para la elipse:

$$1 + 3x + 2y + x^2 - 4xy + 7y^2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

La relación que la elipse tiene con sus elementos asociados es:

Si representamos por 2 a la longitud del hilo que hemos considerado para dibujar la elipse, podemos hallar la medida de algunos elementos de la elipse y las relaciones entre ellos.



Consideraremos que 2 b representa la longitud del eje menor, es decir, que CD = 2 b, y que 2 c representa la distancia focal, es decir, F1F2=2c.

Puesto que A es un punto de la elipse, se verifica que AF1 + AF2 = 2 a, y como A F1 = B F2, se tiene que:

A B = B F1 + A F1= B F1 + B F2 = 2 a

Luego la longitud del eje mayor es: AB= 2 a

Puesto que C es un punto de la elipse, se verifica que CF1 + CF2 = 2 a, y como C también es un punto de la mediatriz del segmento F1 F2, cumple que CF2 = CF1. Así pues:

CF2+CF1= CF2+CF2= 2 a → CF2 = a

Observemos que en la figura el triángulo COF es rectángulo, luego podemos afirmar que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Al variar la distancia focal, manteniendo constante el semieje mayor a, varía el achatamiento de la elipse. Éste se mide mediante un número que se denomina excentricidad definido como el cociente entre la semidistancia focal y el semieje mayor:

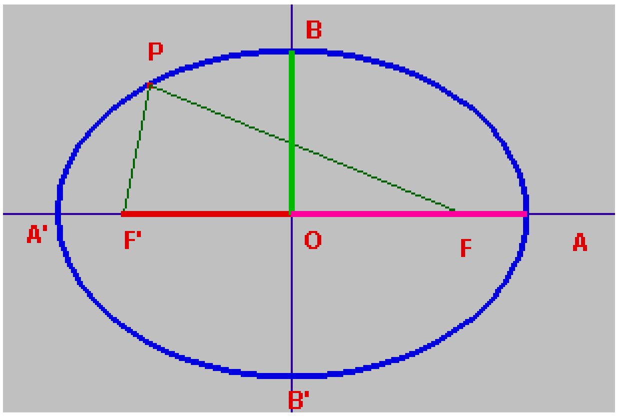
$$e = \frac{c}{a}$$

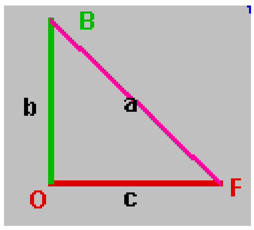
Gráfico

La representación gráfica de la elipse se puede abordar desde dos perspectivas distintas:

- Como representación plana. Este tipo de representación está muy ligada a la representación numérica a través de sus elementos.
- Como sección de un cono. La cónica se representa a partir de la sección de un cono mediante un plano. Variando la inclinación de este podemos conseguir las cuatro cónicas.

Representación gráfica plana de la elipse





- Sean F y F' los focos de la elipse.
- La distancia de F F' se llama *distancia focal* y se designa por 2c.
- El punto medio O del segmento FF' se llama *centro* de la elipse.
- El segmento BB' mediatriz del segmento FF' se llama *eje menor* y su longitud es 2b.
- El segmento AA' se llama *eje mayor* de la elipse y su longitud es 2a.
- Los segmentos PF y PF' se llaman *radios vectores* y su suma es igual a 2a.
- Los semiejes a, b y c de la elipse forman un triángulo rectángulo: $a^2 = b^2 + c^2$
- El cociente $e = \frac{c}{a}$ se llama *excentricidad* de la elipse.

Representación espacial de la elipse como sección del cono

Manipulativo

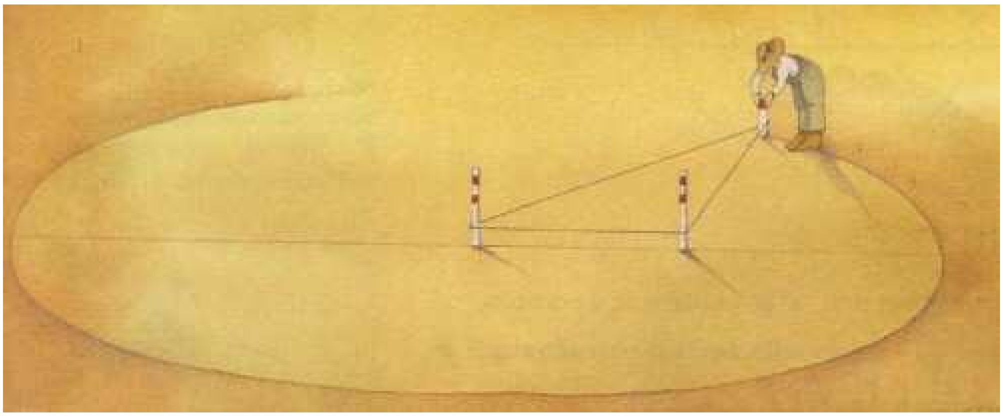
Una de las maneras con la que podemos abordar la representación de las cónicas es de forma manipulativa, esto es, utilizando las herramientas necesarias podemos representar cualquiera de las cuatro cónicas. Los métodos seleccionados en este caso son:

- El cono de madera. Este material manipulativo permite obtener las cónicas como secciones del cono. El cono tiene las secciones que dan lugar a las cuatro cónicas.
- Problema del jardinero. Utilizando dos palos y una cuerda de longitud fija, podemos representar a la elipse.
- Papiroflexia. Podemos representar a las cuatro cónicas utilizando únicamente papel. Las propiedades de simetría y reflexión de éstas, permiten obtener de forma aproximada sus representaciones mediante pliegues de un papel.
- Iluminación. El uso de una lámpara con tulipa circular o el uso de una linterna junto con una superficie esférica como puede ser un balón nos permite representar a las cónicas mediante sombras variando la posición de la luz con respecto al objeto.

Para la elipse, tenemos:

- Construcción de ésta con el método del jardinero:

Para dibujar la elipse en la tierra, ha puesto dos estacas en el suelo separadas una cierta distancia y está utilizando una cuerda con sus extremos unidos. El jardinero tensa la cuerda con las dos estacas y una vara que sujeta con la mano y dibuja la elipse creando un surco con la vara mientras se asegura de que la cuerda siempre forma un triángulo:



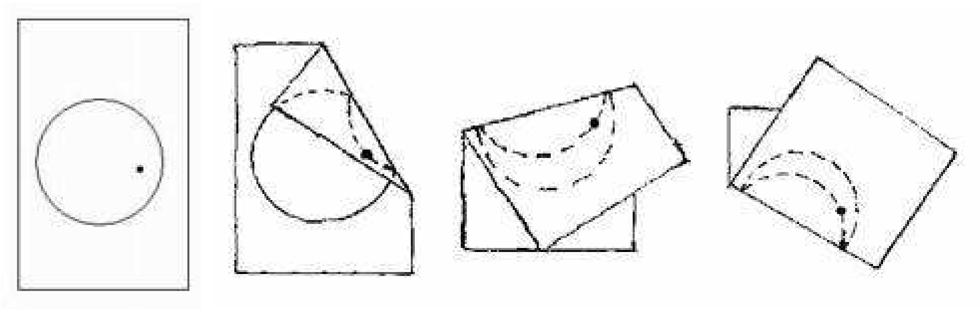
- Papiroflexia

Podemos construir las diferentes cónicas con un simple papel haciendo uso de la papiroflexia. En particular, para formar la elipse debemos seguir los siguientes pasos:

1- Tomamos un papel y dibujamos en él una circunferencia lo más grande posible. Utilizaremos un rotulador para que pueda verse al trasluz.

2- Pintamos un punto dentro de la circunferencia pero procurando que quede lejos del centro de la misma.

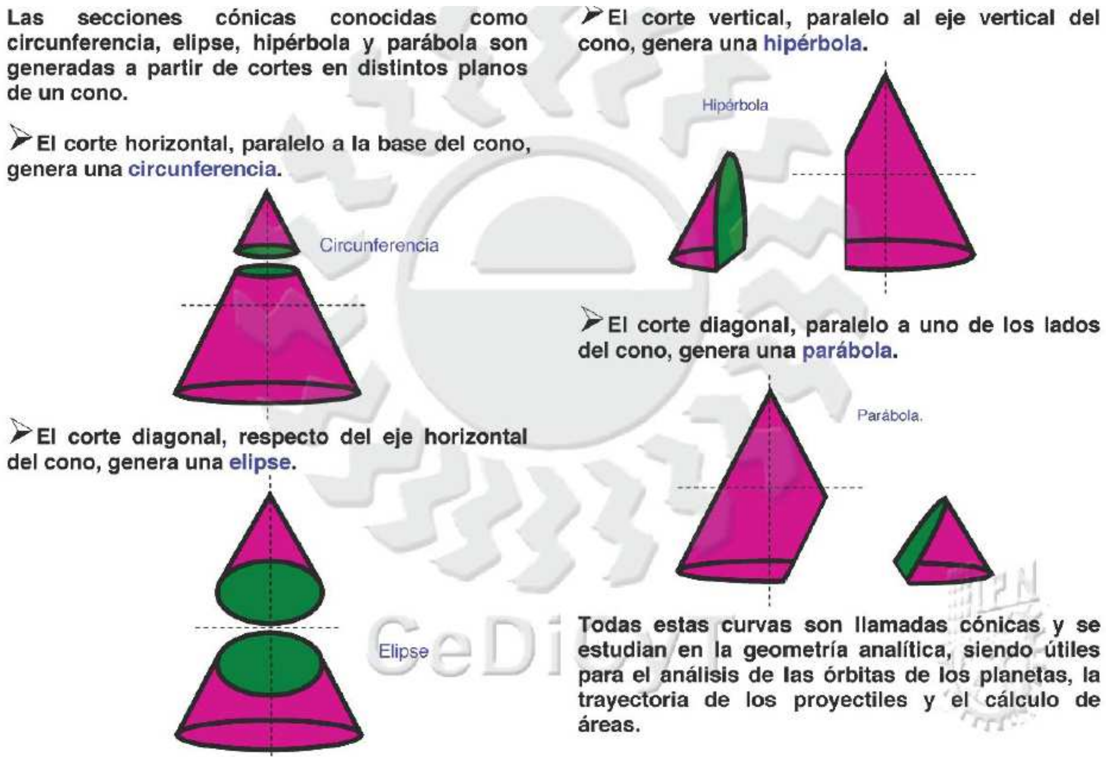
3- Plegamos el papel de manera que, mirando a trasluz, hagamos coincidir un punto de la circunferencia con el punto pintado dentro de ella.



4- Marcamos bien la línea de pliegue y abrimos el papel. Repetiremos esto varias veces con distintos puntos de la circunferencia. Cuantas más veces, mejor.
5- Después de haberlo hecho suficientes veces, abrimos de nuevo el papel y vemos que los pliegues perfilan una elipse en la que el punto que dibujamos es uno de los focos y el centro de la circunferencia el otro.

- Cono de madera

Nos referimos a un material consistente en un doble cono de madera al que se le van quitando piezas y podemos ir visualizando las diferentes cónicas. Puede ser algo parecido a lo siguiente:



- <u>Sombras</u>

Otro proceso sencillo y bastante accesible para ver cónicas es mediante sombras. Si tomamos, por ejemplo, una pelota y una linterna, según la dirección en que alumbremos la pelota podemos ve las diferentes cónicas.

En la siguiente figura se muestra cómo podemos ver una elipse:

<u>Tecnológica</u>

Los programas informáticos actuales son de gran utilidad para la representación de cónicas. Son muchas las formas en que podemos representar una cónica en estos soportes:
<u>Simbólica</u>. Introduciendo algunas de los tres tipos de ecuaciones.
<u>Numérica.</u> Indicando cuál es la matriz o los elementos de la cónica.
<u>Gráfica.</u> Representando directamente la cónica.

Los programas que podemos utilizar para ello son, entre otros, los siguientes:

Geogebra
Cinderella
Cabri
Mathematica

Para la elipse tenemos:

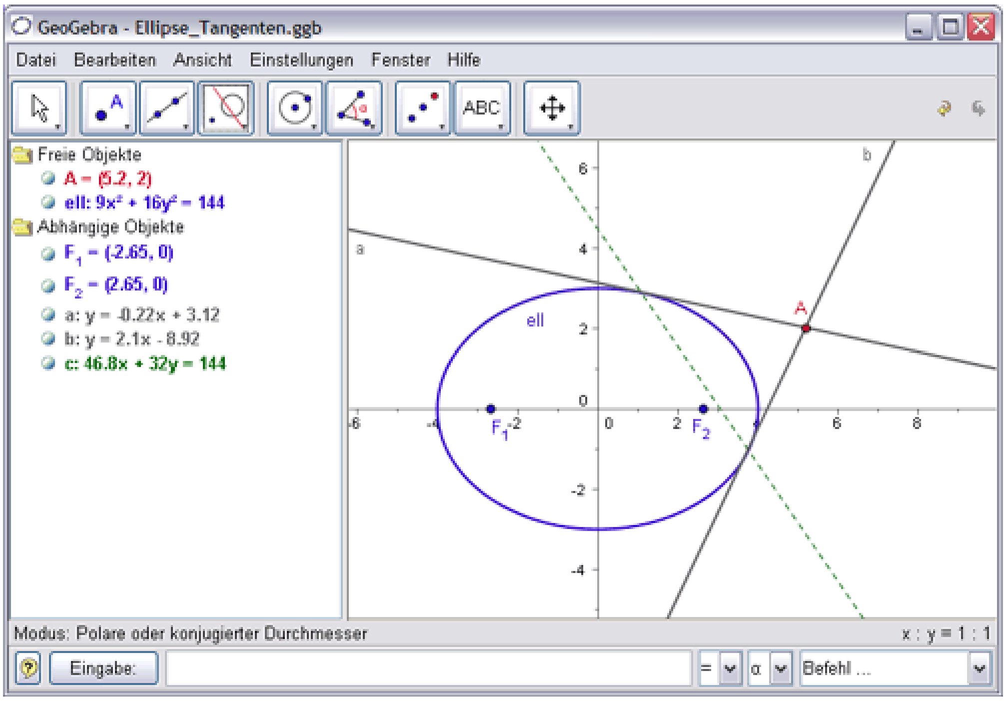
- Video de youtube

En el siguiente enlace podemos ver un video de la construcción de una elipse con regla y compás:

http://www.youtube.com/watch?v=1c8WKA2yUvE

- Geogebra

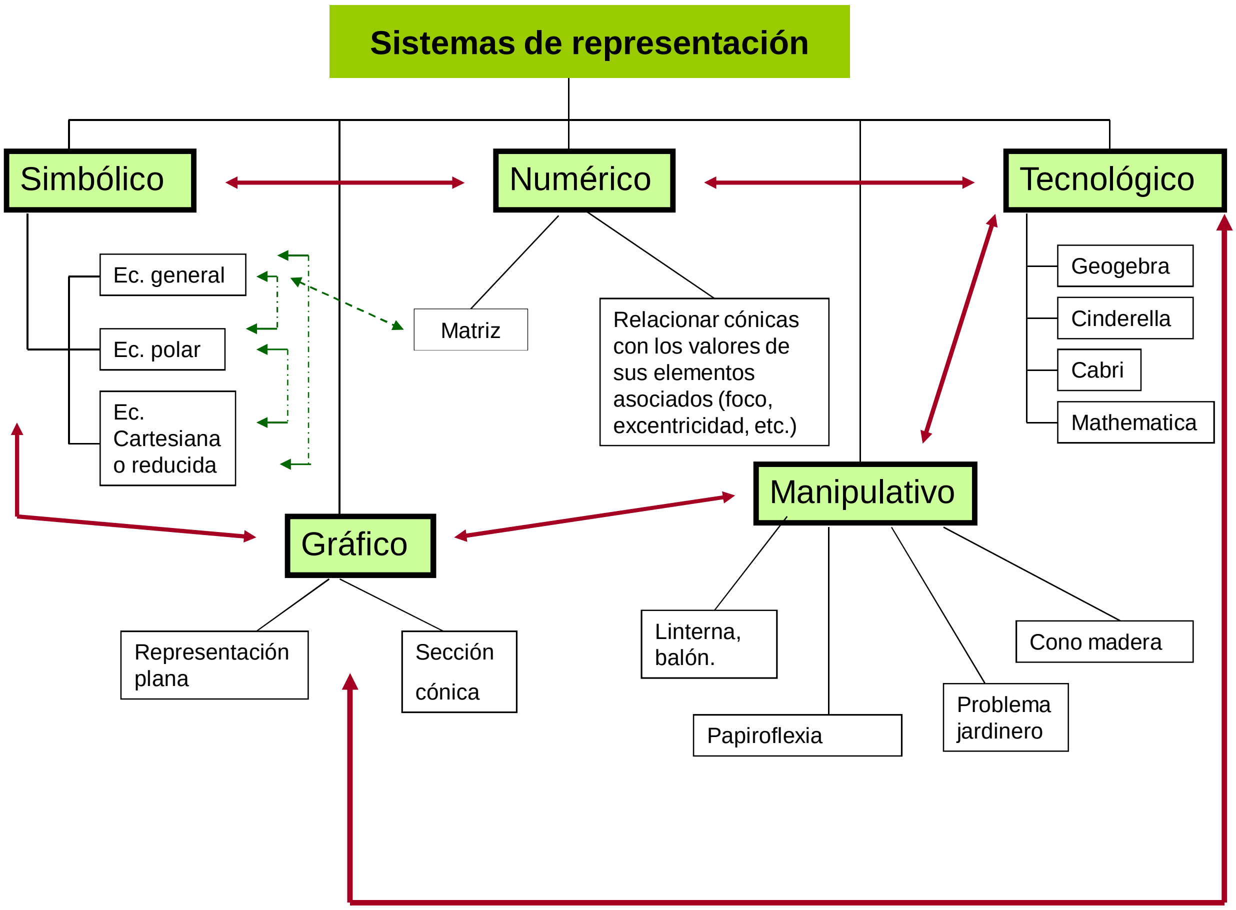
Con este programa podemos construir una elipse teniendo en cuenta sus propiedades, sobre todo, que la suma de la distancia de cualquier punto a los focos es constante:



Además, existen hojas dinámicas en las que podemos mover los focos y ver lo que ocurre, como por ejemplo en la siguiente página:

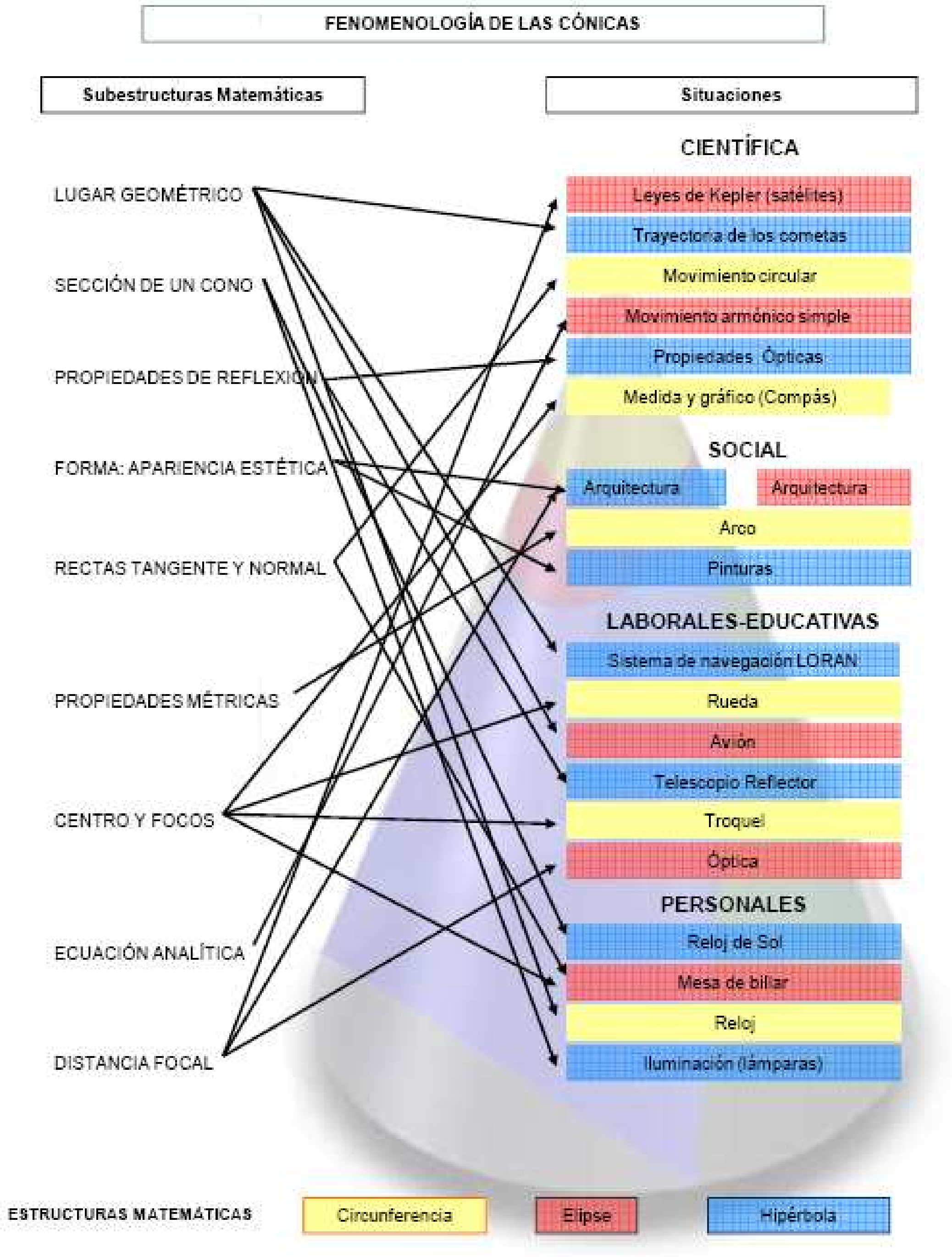
http://centros5.pntic.mec.es/ies.victoria.kent/Rincon-C/Simulaci/Elipse/Elipse.html

Como se mencionó al principio todos estos métodos de representación están relacionados. El siguiente esquema muestra las posibles representaciones de las cónicas junto con las relaciones existentes entre ellas.



¿PARA QUÉ SIRVEN?

En la figura siguiente mostramos las relaciones básicas entre algunas subestructuras matemáticas de las cónicas y diversos fenómenos y campos de problemas en los que aparecen dichas subestructuras organizadas por tipo de situaciones.



A la hora de estudiar la fenomenología de las cónicas, y relacionarla con las subestructuras asociadas, podemos encontrar infinitos ejemplos. En este estudio nos reduciremos a una muestra por la imposibilidad de enumerarlos todos. La importancia fundamental de las cónicas reside en el aparato sensitivo del hombre mismo. Su capacidad de percepción depende principalmente del ojo. El hombre, es ante todo, una criatura que mira, y los rayos luminosos que penetran en el ojo o que de él parten en dirección contraria para construir la visión forman un cono. Nos hemos centrado en las cónicas que desde nuestro punto de vista tienen más interés que son la circunferencia y la elipse.

LA CIRCUNFERENCIA

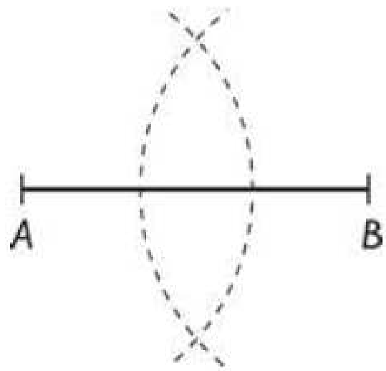
- LA RUEDA

La rueda es un elemento necesario en infinidad de inventos, tanto antiguos como actuales, desde los primitivos molinos, hasta la bicicleta, motocicleta, automóvil, avión, cosechadora, tractor, silla de ruedas, etc.

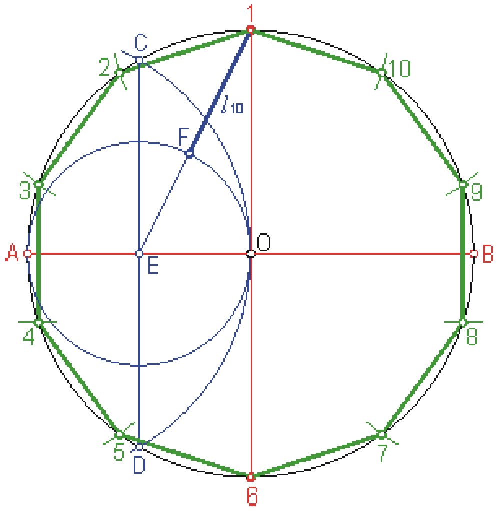
Subestructura asociada: La equidistancia de todos los puntos de la circunferencia a un único punto (centro) permite repartir fuerzas y provocar giros aplicando la fuerza en ese punto.
Clasificación: Laboral.

- **MEDIDOR Y SOPORTE GRÁFICO**

A través de diversos artilugios la circunferencia nos ayuda a trasladar distancias.
Daremos importancia por encima de los demás al compás, como el utensilio que a través de arcos de circunferencia y circunferencias completas permite trasladar medidas prefijadas y servir de herramienta gráfica con un sinfín de aplicaciones.



Así como soporte gráfico para diversas construcciones, desde polígonos regulares hasta volúmenes complejos.

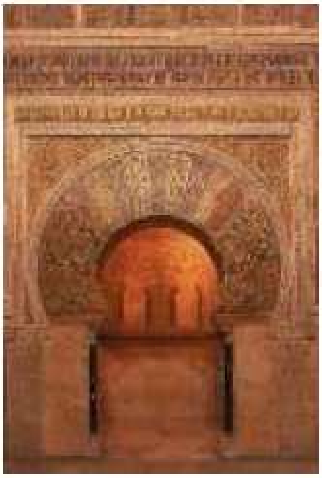


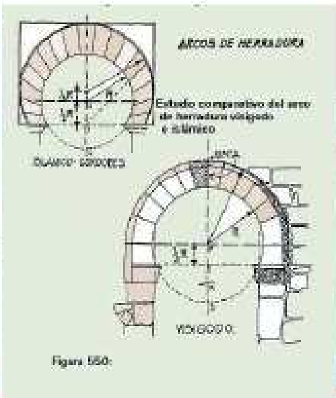
<u>Subestructura asociada</u>: La esencia métrica de la circunferencia. La distancia fija medible entre el centro y cada uno de sus puntos.

<u>Clasificación:</u> Laboral, Social (arte).

- **ARCO**

En el lenguaje cotidiano la palabra **arco** se emplea, por definición, para hacer referencia a la porción de una curva determinada. En definitiva, un arco no es más que un cierto segmento de una circunferencia. En ese mismo sentido empleamos el término cuando, en Arte, hacemos alusión a determinados tipos de arco, como el de medio punto (media circunferencia) o el de herradura (más de media circunferencia).

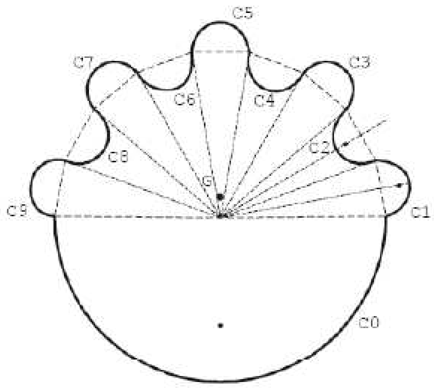




<u>Subestructura asociada:</u> La equidistancia y la repartición de fuerzas, además de la comodidad constructiva de trabajar con su fórmula analítica. Métrica.
<u>Clasificación:</u> Laboral, Social (arte y arquitectura).

- **TROQUEL**

Un troquel de corte es una herramienta que se instala en una prensa y permite practicar cortes o perforaciones en láminas, que en la mayoría de las aplicaciones son metálicas. Un troquel de corte consta esencialmente de uno o varios punzones perfilados según el corte que se quiera realizar, y de una matriz, la cual tiene perforaciones en correspondencia de los punzones.



Subestructura asociada: Centro y focos.

Clasificación: Laboral.

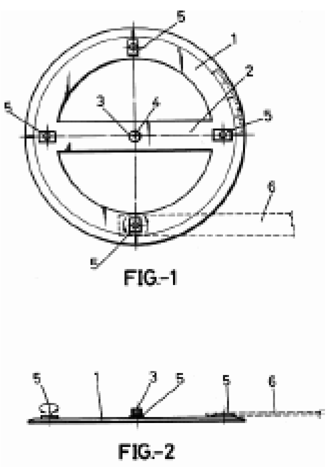
- **RELOJ**

Que la mayoría de las esferas de los relojes sean de forma circular no es casualidad. Repitiendo el uso de la posibilidad de un solo centro de giro para llegar a todos los lugares por igual tenemos como muestra este utensilio de medir tiempo.

Subestructura asociada: Importancia del centro único de la circunferencia.

Clasificación: Laboral, Social y Científica.

- **MEDIDOR DE ANGULO**



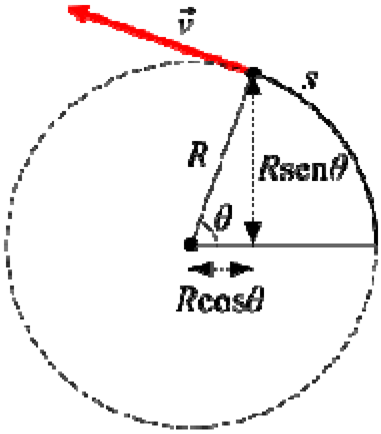
La medida de la circunferencia en grado, la tabulación de los ángulos a partir de ella nos permite usarla para su medida, a través de distintos utensilios como por ejemplo el transportador.

Subestructura asociada: Tabulación de la medida de ángulos a partir de la circunferencia

Clasificación: Laboral y Científica.

➢ MOVIMIENTO CIRCULAR

Se define movimiento circular como aquél cuya trayectoria es una circunferencia. Una vez situado el origen O de ángulos describimos el movimiento circular mediante las siguientes magnitudes.



Podemos asociar en este caso las rectas tangentes y normales a la circunferencia como velocidad del movimiento y aceleración centrípeta respectivamente.

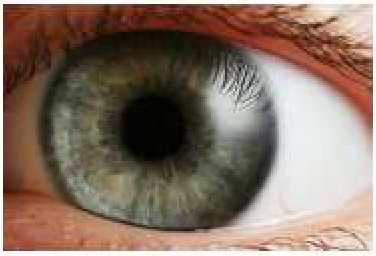
<u>Subestructura asociada:</u> Dirección de movimiento igual a la figura y rectas tangente y normal en un punto de ella.
<u>Clasificación:</u> Laboral y Científica.

(Igualmente podríamos incluir el movimiento pendular, en arcos de circunferencia y con similares características)

➢ UN PAR DE CURIOSIDADES

NATURALEZA

La de la circunferencia en la naturaleza es innegable e ineludible, no nos detendremos a analizar los porqués, solo rescatar que buscando en la natura es raro no topar con nuestra figura.

LINEAS DE NAZCA

Existen en el desierto de Atacama, en Nazca y algún otro terreno cercano unos dibujos de los cuales aun no se sabe el origen, rescato de ellos una imagen con nuestra circunferencia presente.

LA ELIPSE

La elipse es la curva que describen los planetas en su giro alrededor del Sol, pero, por razones obvias no podemos verla tal cual. Encontrar elipses a nuestro alrededor, aparentemente es difícil, pero sólo aparentemente. Vamos a ver a continuación algunos ejemplos.

- **ARQUITECTURA**

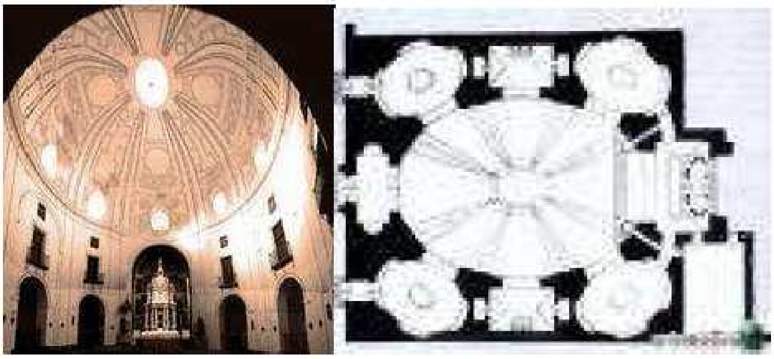
Las formas arquitectónicas constituyen, como las pictóricas o las escultóricas, un lenguaje que contiene la posibilidad de transmitir mensajes.

Para Rudolf Arnheim las formas tienen un determinado efecto psicológico sobre quien las contempla, efecto derivado de sus intrínsecas cualidades expresivas. Así, la línea horizontal comunica estabilidad, la vertical es símbolo de infinitud, de ascensión; una voluta ascendente es alegre, mientras que si por el contrario es descendente comunica tristeza; la línea recta significa decisión, fuerza, estabilidad, mientras que la curva indica dinamismo, flexibilidad; la forma cúbica representa la integridad, el círculo comunica equilibrio y dominio, mientras que la esfera y la semiesfera (cúpulas) representan la perfección.
La elipse, por su parte, al contar con dos centros comunica inquietud, inestabilidad.

Subestructura asociada: focos
Clasificación: público

En muchas ciudades es fácil encontrar plazas de planta elíptica, normalmente conocidas por el nombre de "plaza elíptica". Por ejemplo, en Madrid y Bilbao existen plazas de este tipo. Sin embargo, la plaza de planta elíptica más famosa en el mundo probablemente sea la Plaza de San Pedro en el Vaticano.

También podemos encontrar edificaciones con planta elíptica. Un ejemplo es la iglesia del Monasterio de San Bernardo, más conocido por "Las Bernardas" en Alcalá de Henares. Un templo con una única nave y planta elíptica, con cúpula del mismo trazado. En sus muros se abren seis capillas, cuatro de ellas también de planta elíptica, con diferentes tamaños de sus portadas.



Monasterio de San Bernardo, "Las Bernardas", en Alcalá de Henares

Igualmente, se utiliza la propiedad reflectante de la **elipse** en la acústica con el objeto del diseño y construcción de "galerías de murmullos": si la forma de la cúpula de un auditórium o de una galería es elíptica, entonces un susurro o murmullo débil emitido en un foco no es casi percibido en la mayor parte del salón excepto en el otro foco.
Esto ha sido utilizado en el Salón de las Estatuas del Capitolio de Washington D.C., en el Tabernáculo Mormón en Salk Lake City, en la denominada "Galería de los Suspiros" en el Convento del Desierto de Los Leones cerca de Ciudad de México, y otras edificaciones.

En el famoso Taj Mahal, construido en el siglo XVII (16301652) en la India por el emperador Sah Yahan en honor de su esposa Mumtazi Mahall, uno de los máximos logros de la arquitectura mogol, tiene una galería de los suspiros en donde anteriormente a la pareja en luna de miel se le colocaba en los respectivos focos, de tal forma que el novio murmuraba la frase: “A la memoria de mi amada inmortal”, la cual era solamente escuchada por su novia situada a una distancia de algo más de 15 m.

Subestructura matemática: Propiedades de simetría de la elipse.
Clasificación: Social.

➢ LEYES DE KEPLER

Estudiando una gran cantidad de datos experimentales, Kepler (1571 – 1630) determinó empíricamente los tres siguientes hechos sobre el movimiento de los planetas conocidos como las leyes de Kepler:

1. La órbita de cada planeta es una elipse con el sol en uno de los focos.
2. El radio vector trazado desde el sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Los cuadrados de los períodos de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de la órbita elíptica.

Newton (1642 – 1727) partiendo de estas tres leyes empíricas y utilizando elementos del cálculo diferencial e integral pudo deducir la ley de gravitación universal: "la fuerza que ejerce el sol sobre un planeta es una fuerza de atracción radial e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los dos centros del sol y del planeta y viene dada por $F = G\frac{mM}{r^2}$ donde m: masa del planeta, M: masa del sol y constante de gravitación universal".

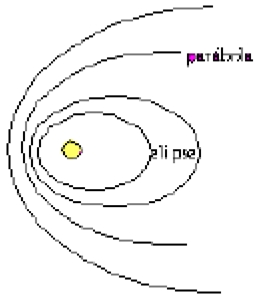
"Los planetas en su movimiento alrededor del Sol describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol" (Primera Ley de Kepler, 1609).

En la Física, la elipse y la parábola aparecen en muchas leyes importantes. Es, quizá, en la Mecánica (parte de la Física que trata del equilibrio y del movimiento de los cuerpos sometidos a cualquier fuerza) en donde la encontramos de forma más inmediata.

En el Universo, el movimiento más frecuente de estrellas, planetas, satélites, etc. es el descrito mediante trayectorias elípticas (la circunferencia es un caso particular de elipse). Esto es así porque, a grandes distancias y para objetos sin carga eléctrica neta importante, la fuerza principal que gobierna este movimiento es la Fuerza Gravitatoria.
Fue el gran físico y matemático Isaac Newton (16421727) quien formuló la Ley de la Gravitación que explica los movimientos de los planetas y satélites en el Sistema Solar.
Esta ley reúne las tres leyes de Kepler en una sola:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

en donde:
F = fuerza de atracción,
G = la constante de gravitación universal,
M y m = las masas del Sol y el planeta y
R = la distancia al foco de la elipse, ocupado por el Sol.



Ec: Energía Cinética

Ep: Energía Potencial

Si la energía cinética es menor en valor absoluto a la energía potencial, ello quiere decir que el satélite no tiene la suficiente velocidad como para separarse de la Tierra, su trayectoria será, entonces, una curva cerrada: una elipse.

Si la energía cinética es igual a la energía potencial en valor absoluto, la elipse pasa a ser una parábola; ello quiere decir que el satélite tiene la velocidad justa para abandonar la Tierra para siempre.

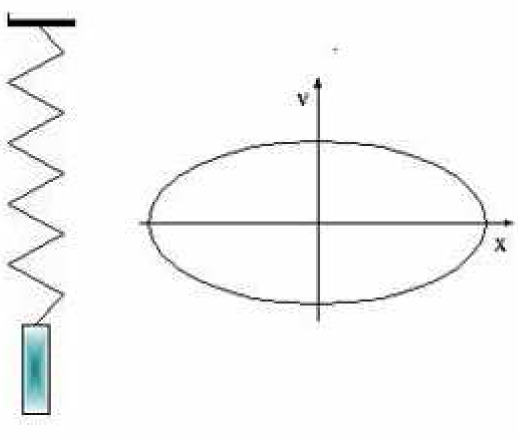
Si energía cinética es mayor en valor absoluto que la energía potencial, entonces, la trayectoria sería una hipérbola, el satélite viajaría hacia el infinito.

Subestructura asociada: focos
Clasificación: Científico

- **OTROS**

La elipse aparece en otras leyes de la Mecánica, además de las que se presentaban al principio del artículo, quizás no tan importantes o conocidas. La comprensión de tales leyes requiere del conocimiento de ciertos conceptos y magnitudes físicas: momentos de inercia, momento angular, velocidad angular, frente de ondas, etc.. Citaré, brevemente, algunos ejemplos.

Elipses en el movimiento armónico simple



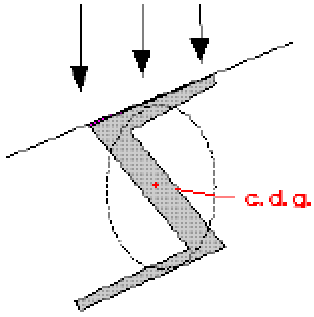
Uno de los movimientos más importantes en la Naturaleza es el movimiento armónico simple (MAS), que es un movimiento periódico, oscilante, en torno a un punto, centro de oscilación. Por ejemplo: una masa colgando de un resorte. Si estiramos el resorte y luego lo soltamos, la masa empezará a subir y a bajar en un MAS. En este fenómeno, nos encontramos a la elipse en la representación del movimiento en el espacio de las fases, es decir, en la representación de la velocidad del peso (eje Y) frente al espacio recorrido respecto al centro de oscilación o de equilibrio (eje X).

Subestructura asociada: ecuación analítica.

Clasificación: Científico.

Elipse de inercia en el sólido rígido

En el estudio del sólido rígido aparece la llamada" Elipse de Inercia". Supongamos una placa a la que podemos hacer girar en torno a ejes de rotación contenidos en la misma placa y que pasan por su centro de masas (o centro de gravedad, c.d.g.). Los puntos sobre los distintos ejes y cuya distancia al centro de masas es inversamente proporcional al cuadrado de su momento de inercia forman una elipse, la "Elipse de Inercia". Esta elipse es muy importante para determinar la resistencia de los materiales (vigas, etc) a la flexión. Una barra es más resistente a la flexión en la dirección del eje mayor de la elipse de inercia de su sección transversal.

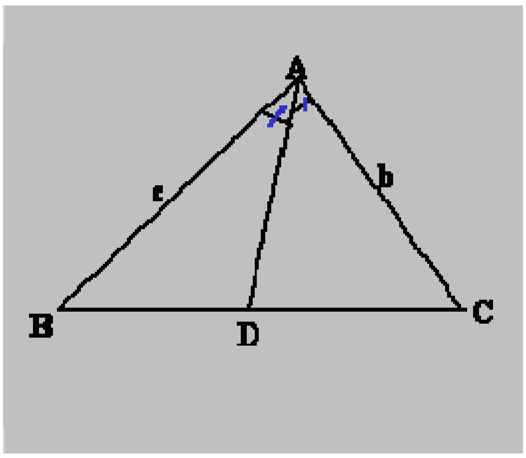


Las flechas representan la carga sobre la viga.
Subestructura asociada: ecuación.

Clasificación: Científico.

- **PROPIEDAD ÓPTICA**

En geometría plana se demuestra el siguiente resultado: Si se tiene un triángulo *ABC* y un punto *D* sobre *BC* (ver figura 6.5.11), entonces:



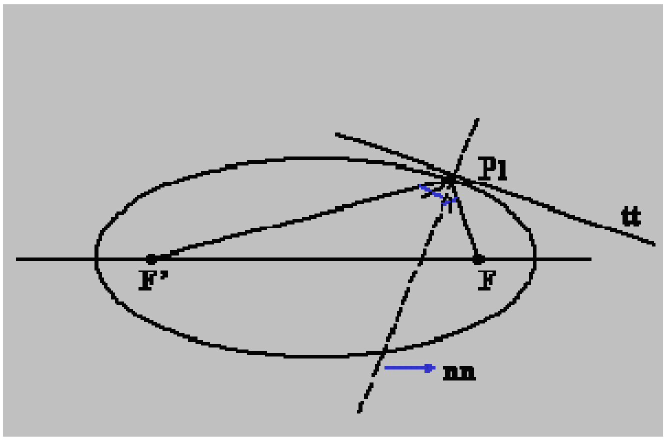
$\overline{AD}$ es bisectriz del ángulo.

$$BAC \Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{c}{b}.$$

Esta propiedad permite construir la normal y por ende la tangente en un punto cualquiera de la elipse.

Al unir el punto *P1* de la elipse con *F'* y con *F*, puede demostrarse que la bisectriz del ángulo *F'P1F* es la normal *nn* a la curva por *P1*.

Esta propiedad se conoce como la propiedad óptica o focal de la elipse y tiene interesantísimas aplicaciones como en la construcción de conchas acústicas y salas.



Supongamos que la elipse se hace rotar alrededor del eje *x* formando una superficie de revolución e imaginemos un salón cuyos techos y paredes son la superficie anterior.
Cuando una persona habla desde un foco F, puede ser escuchada en el otro foco a pesar de estar muy lejos del anterior y puede no ser audible en otros puntos intermedios a causa de que las ondas de sonido chocan contra las paredes y son reflejadas en el segundo foco y llegan a él en el mismo tiempo ya que ellas viajan el mismo tiempo.

Subestructura asociada: distancia focal.
Clasificación: Científico.

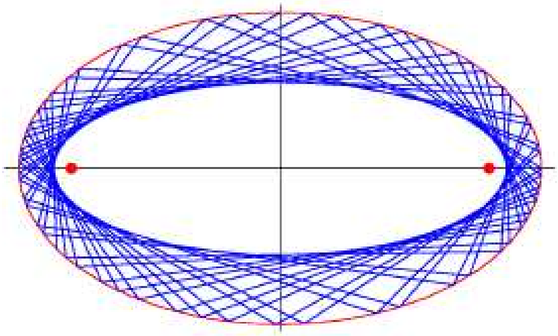
- **AVIONES**

Debido a la resistencia del viento, las trayectorias que realizan los aviones cuando hacen viajes circulares se vuelven elípticas.

Subestructura asociada: lugar geométrico.
Clasificación: laboral.

- **MESA BILLAR**

Tracemos la recta tangente a cualquier cónica en cualquiera de sus puntos. En el caso de la elipse y de la hipérbola, tracemos además las rectas que unen dicho punto con los focos. Entonces se demuestra que los ángulos (agudos) que forman esas dos rectas con la recta tangente son iguales. Otra forma de expresar este hecho es que, si se dirige un rayo partiendo de uno de los focos, al reflejarse en la figura sigue en una dirección que pasa por el otro foco.



Subestructura asociada: Recta tangente y focos
Clasificación: personal

- **FORMAS**

Conseguir una parábola y una elipse mediante una lámpara:

La parábola

La elipse

Clasificación: Personal

¿QUÉ EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE TENEMOS?

PRIORIDADES DE APRENDIZAJE:

Las prioridades de aprendizaje que hemos escogido para este tema son los siguientes:
1. Identificar las diferentes cónicas no degeneradas
2. Analizar las posiciones relativas y las rectas notables
3. Representar cónicas gráficamente
A continuación desgranamos estas prioridades:

I Identificar las diferentes cónicas no degeneradas

- Definir lugar geométrico y las diferentes cónicas como tales.
- Identificar los diferentes elementos de las cónicas y describir cómo influyen en la clasificación de éstas.
- Relacionar cada cónica con sus distintas ecuaciones y obtener éstas a partir de varios elementos o propiedades.
- Distinguir las diferentes secciones del cono que dan lugar a las distintas cónicas.

II Analizar las posiciones relativas y las rectas notables

- Hallar la recta tangente a una cónica en un punto de ésta.
- Determinar posiciones relativas entre recta y cónica.

III Representar cónicas gráficamente

- Construir gráficamente las cónicas usando programas de geometría dinámica.
- Relacionar las ecuaciones de las cónicas con su representación gráfica y viceversa.
- Identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos.

Seguidamente hacemos un estudio detallado de las competencias de PISA a las que contribuye cada objetivo:

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
	Identificar las diferentes cónicas no degeneradas								
1	Definir lugar geométrico y las diferentes cónicas como tales.	☆		☆					
2	Identificar los diferentes elementos de las cónicas y describir cómo influyen en la clasificación de éstas.		☆	☆					☆
3	Relacionar cada cónica con sus distintas ecuaciones y obtener éstas a partir de varios elementos o propiedades.	☆	☆		☆		☆	☆	
4	Distinguir las diferentes secciones del cono que dan lugar a las distintas cónicas.						☆		☆

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
	Analizar las posiciones relativas y las rectas notables								
5	Hallar la recta tangente y la recta normal a una cónica en un punto de ésta.				☆	☆		☆	
6	Determinar posiciones relativas entre recta y cónica.				☆	☆		☆	☆

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
	Representar cónicas gráficamente								
7	Construir gráficamente las cónicas usando programas de geometría dinámica.	☆	☆				☆		☆
8	Relacionar las ecuaciones de las cónicas con su representación gráfica y viceversa.	☆	☆				☆		
9	Identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos.			☆	☆	☆		☆	

Balance final	4	4	3	4	3	4	4	4

A continuación, justificaremos brevemente la elección que hemos hecho de las competencias:

1) ***Definir lugar geométrico y las diferentes cónicas como tales.***

   PR: Hay que distinguir entre las diferentes cónicas y conocer sus diferentes definiciones matemáticas.
   C: Se expresan usando ideas matemáticas.

2) ***Identificar los diferentes elementos de las cónicas y describir cómo influyen en la clasificación de éstas.***

   AJ: Elabora argumentos de clasificación de las cónicas en base a sus elementos.
   C: Describen cómo influyen los elementos en cada una de las cónicas, qué características les aportan para su clasificación.

HT: Usando programas informáticos y juegos, se pueden modificar los diferentes elementos tras apreciarlos y moverlos para ver qué ocurre.

3) ***Relacionar cada cónica con sus distintas ecuaciones y obtener éstas a partir de varios elementos o propiedades.***

PR: Ofrece distintos elementos según el tipo de ecuación que nos ofrezcan de éstos. Debe conocer las diferentes ecuaciones, tanto entre cónicas, como las distintas formas dentro de una misma cónica.
AJ: Justifica en qué se basa para establecer relaciones entre cónica y ecuación.
M: Expresan matemáticamente un problema y usa procesos matemáticos para resolverlo.
R: Interpretan, relacionan formas diferentes de representación.
LS: Manejan enunciados y expresiones con símbolos matemáticos.

4) ***Distinguir las diferentes secciones del cono que dan lugar a las distintas cónicas***.

R: Interpretan las diferentes secciones del cono como un sistema más de representación.
HT: Podemos usas las herramientas tecnológicas para visualizar las secciones.

5) ***Hallar la recta tangente y la recta normal a una cónica en un punto de ésta.***

M: Expresan matemáticamente este tipo de problemas.
RP: Resuelven y plantean problemas sobre las rectas notables asociadas a las cónicas.
LS: Utilizan variables, resuelven ecuaciones, comprenden cálculos.

6) ***Determinar posiciones relativas entre recta y cónica.***

M: Estructuran y analizan un problema.
RP: Resuelven y plantean problemas sobre posiciones relativas en el plano.
LS: Uso de las representaciones simbólicas de recta, cónica, distancia.
HT: Útil para ver la representación gráfica y comprobar el resultado obtenido analíticamente.

7) ***Construir gráficamente las cónicas usando programas de geometría dinámica.***

PR: Tienen que seleccionar los elementos relevantes para la construcción de cada cónica y elegir un método de construcción apropiado.
AJ: Deben justificar por qué eligen un determinado método y argumentar cada paso que dan.
R: Diferentes formas de representación.
HT: Conocer y saber utilizar las diferentes herramientas para poder usarlas.

8) ***Relacionar las ecuaciones de las cónicas con su representación gráfica y viceversa.***

PR: Deben utilizar conceptos y procedimientos matemáticos para establecer la relación.
AJ: Justificar los cálculos y el método para establecer dicha relación.
M: Expresen y estructuren matemáticamente un problema inicial.
R: Decodifiquen, interpreten distintas formas de representar.

9) ***Identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos.***

C: Expresan ideas acerca de la matemáticas.
RP: Resuelven y analizan problemas.
LS: Traducen problemas al lenguaje matemático y luego interpretan el resultado matemático dentro del contexto del problema.

¿QUÉ LIMITACIONES PUEDEN SURGIR EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE?

En el estudio de este tema, las mayores dificultades se localizan en diferentes ámbitos. Por un lado, existen numerosas y diferentes representaciones para un mismo concepto que se interrelacionan entre sí. Por otro lado, deben tener un cierto grado de desarrollo de la visión espacial ya que ayuda bastante a la comprensión de los contenidos y procedimientos que se llevarán a cabo para la consecución de los objetivos. Hay que señalar también que se necesita una cierta soltura a la hora de realizar cálculos algebraicos, ya que estarán presentes en el desarrollo de la unidad.

En el siguiente cuadro mostramos los errores y dificultades que creemos que pueden surgir, señalando su relación con los objetivos anteriores:

ERRORES Y DIFICULTADES	OBJETIVOS ASOCIADOS
1. No reconocer las cónicas como secciones del cono.	1 y 4
2. No percibir la presencia de las cónicas en la vida y naturaleza.	9
3. Dificultad para identificar los elementos de la cónica en su representación gráfica.	2,7 y 8
4. Desconexión entre los distintos sistemas de representación.	3,4,5,6,8 y 9
5. Incapacidad de identificar problemas relacionados con cónicas y resolverlos.	5,6 y 9
6. Manejo inadecuado de cálculo y de expresiones algebraicas.	2,3,5,6 y 9
7. Falta de visión espacial.	1,4,5,6 y 9
8. Deficiencia de conceptos geométricos previos (distancias, recta normal, perpendicularidad,…)	5,6 y 7

SECUENCIACIÓN

Hemos organizado las tareas en el siguiente orden atendiendo a su complejidad y entendiendo que no completan las labores prácticas necesarias para abarcar todo el tema y que es necesario y posible intercalar otras de diversos tipos para ello.
Proponemos la siguiente secuenciación:

- TAREA 1:

Halla la ecuación que cumplen todos los puntos cuya distancia al origen de coordenadas es 5.

- TAREA 2:

Estudiar la posición de la circunferencia C: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ con respecto de cada una de las rectas:

r:3x−4y−26=0

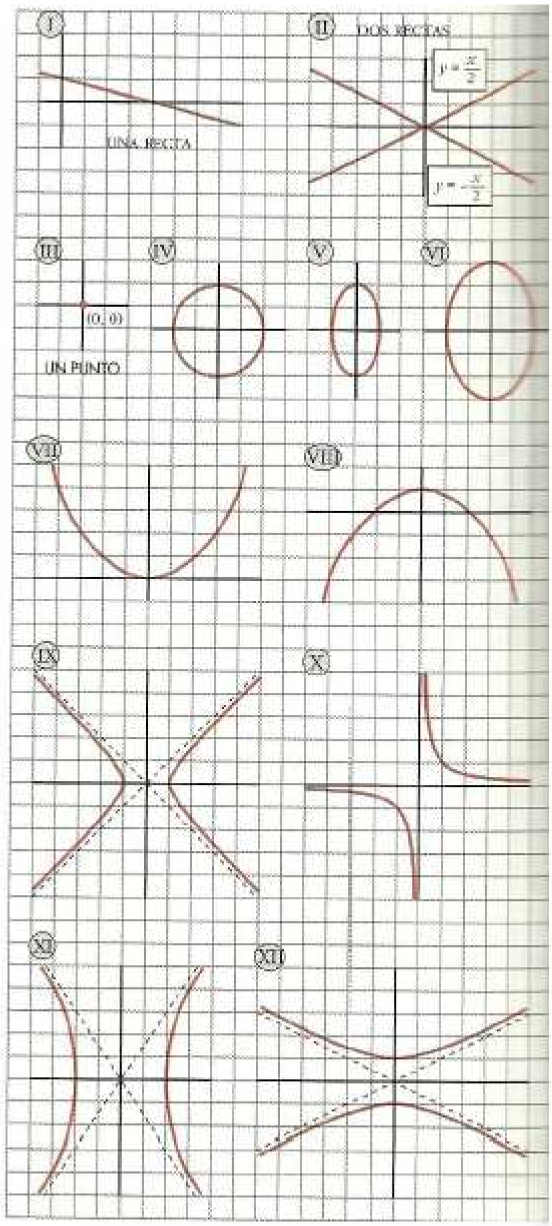
s:5x−8y+60=0

t:3x−4y−1=0

¿Cómo has llegado a la solución?

- TAREA 3:

Asocia cada una de las siguientes ecuaciones a una de las gráficas que se dan a continuación, justificando dicha relación:



$a)\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ $\qquad b)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1$

$c)\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$ $\qquad d)\ \frac{x}{4}+y=1$

$e)\ \frac{x^2}{4}+y=1$ $\qquad f)\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

$g)\ y^2-\frac{x^2}{4}=1$ $\qquad h)\ \frac{x^2}{4}+y^2=0$

$i)\ \frac{x^2}{4}-y^2=0$ $\qquad j)\ \frac{x^2}{4}-y=0$

$k)\ x^2-y^2=1$ $\qquad l)\ x.y=1$

- TAREA 4:

La órbita que describe la Tierra alrededor del Sol es una cónica de excentricidad 0.017 y semieje mayor 149.60 millones de kilómetros. Calcula:

a) La longitud del semieje menor.

b) Sabiendo que el Sol está situado en uno de los focos, halla la máxima y la mínima distancia que lo separan de la Tierra.

Esquemáticamente,

Tarea 1 –> Tarea 2 -> Tarea 3 -> Tarea 4

El porqué de ésta y no otra elección responde a razones de contenido, de tipo cognitivo así como funcionales, ya que tras un detallado estudio, hemos llegado a la conclusión de que dicho orden se ajusta, de manera bastante adecuada, a cada uno de esos tres criterios.

Los contenidos

Desde el punto de vista de los contenidos, el aprendizaje de las cónicas comienza con la idea de lugar geométrico, continúa con el análisis de la circunferencia y sus posiciones relativas con respecto a una recta y posteriormente se presentan el resto de cónicas, sus elementos y propiedades (secuencia de contenidos extraída de libros de texto para 1º Bachillerato de Anaya y para 2º Bachillerato de Guadiel). Es natural entender que la generalización a través de la resolución de problemas es posterior a la exposición de las bases del contenido.

En virtud de los procedimientos estamos pasando de un ejercicio sencillo en cálculos a otro algo más complejo pero mecánico y que añade interpretación a la actividad de cálculo. En la tercera tarea cabe destacar que posee distintas vías de trabajo para encontrar soluciones, incluyendo cálculos, dominio en el uso de las propiedades de las cónicas y relaciones entre diversos sistemas de representación. La tarea final se basa en la aplicación física de los contenidos, con procedimientos de interpretación, aplicación y cálculo.

La Complejidad

Podemos destacar aquí que las tareas siguen un orden creciente de complejidad empezando con una tarea de reproducción ya que se trata de cálculos y procedimientos rutinarios, siguiendo con dos de conexión debido a que se trata de interpretar y solucionar problemas estándar y terminando con el problema de la órbita de la Tierra que es de reflexión puesto que requiere una interpretación y comprensión más profunda.

Los objetivos

Las tareas abordan diversos objetivos específicos de nuestro tema, por ello, hemos creído razonable colocar primero aquella que participaba más del primer bloque de éstos: “identificar las diferentes cónicas no degeneradas” (según los tres bloques en que los hemos organizado). La segunda tarea trabaja objetivos del segundo bloque: **“**analizar las posiciones relativas y las rectas notables”. En la tercera, y a modo de síntesis, estamos trabajando objetivos del primer y tercer bloque este último denominado "representar cónicas gráficamente" y en la última se trabaja directamente el último de los objetivos específicos que encontramos en el análisis cognitivo ("identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos"), además de englobar algunos de los procedimientos y contenidos de los objetivos anteriores.

Competencias PISA

A nivel de competencias, la secuenciación, si no completa, engloba un alto número de ellas. Y entendemos natural trabajar en las primeras tareas competencias como Pensar y Razonar, Representar, Argumentar y Justificar y el Lenguaje Simbólico tan presente en este tema y dejar para la tarea final el trabajo de las competencias de Modelizar y Resolución de Problemas debido a que se crean modelos matemáticos para resolver situaciones de la realidad.

Errores y limitaciones

En cuanto a la detección de errores y limitaciones destacar que la tercera tarea ayuda a reconocer errores de concepto y procedimientos. Además, nos permite realizar un estudio global para evaluar el estadio del proceso enseñanza-aprendizaje. En la cuarta tarea podemos trabajar directamente con la limitación tan clara que sufren los alumnos/as para detectar la presencia de las cónicas en la ciencia y en la naturaleza.

Funcionalidad

Por último argumentaremos por qué razones, en lo que a funcionalidad de tareas se refiere, hemos elegido este orden de secuenciación. Nos ha parecido beneficioso para el aprendizaje comenzar con una tarea más basada en elaborar y construir, para ir así descubriendo el tema conjuntamente. Hemos creído oportuno continuar con ejercicios que sirvan para practicar y ejercitar habilidades y terminar con tareas de síntesis, que en este caso son de dos diferentes tipos pero ambas requieren ya una idea global de contenidos y procedimientos.

ANÁLISIS DE TAREAS

TAREA 1:
Halla la ecuación que cumplen todos los puntos cuya distancia al origen de coordenadas es 5.

Objetivos
Definir lugar geométrico y las diferentes cónicas como tales (1).
Relacionar cada cónica con sus distintas ecuaciones y obtener éstas a partir de varios elementos o propiedades (3)
Relacionar las ecuaciones de las cónicas con su representación gráfica y viceversa(8).

Contenidos:
Interpretación y relación de idea de lugar geométrico con la cónica.
Representación de una cónica.

Circunferencia.

Sistemas de representación:
Simbólico ⟺ Gráfico.

Situación/Contexto:
Laboral-Educativa/ Lugar Geométrico

Competencias:
Pensar y razonar
Representar

Complejidad:
Reproducción

TAREA 2:

Estudiar la posición de la circunferencia

$$\mathbf{C}: \boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0}$$

con respecto de cada una de las rectas:

$$r{:}3x-4y-26=0$$
$$s{:}5x-8y+60=0$$
$$t{:}3x-4y-1=0$$

¿Cómo has llegado a la solución?

Objetivos:
Determinar posiciones relativas entre recta y cónica.

Contenidos:
Concepto de posiciones relativas.
Determinación de las posiciones relativas entre recta y circunferencia.

Sistemas de representación:
Simbólico y verbal

Situación/Contexto:
Científica/ Matemático

Competencias:
Lenguaje simbólico
Argumentar y justificar

Complejidad:
Conexión

TAREA 3:
Asocia cada una de las siguientes ecuaciones a una de las gráficas que se dan a continuación, justificando dicha relación:

$a)\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \qquad b)\ x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

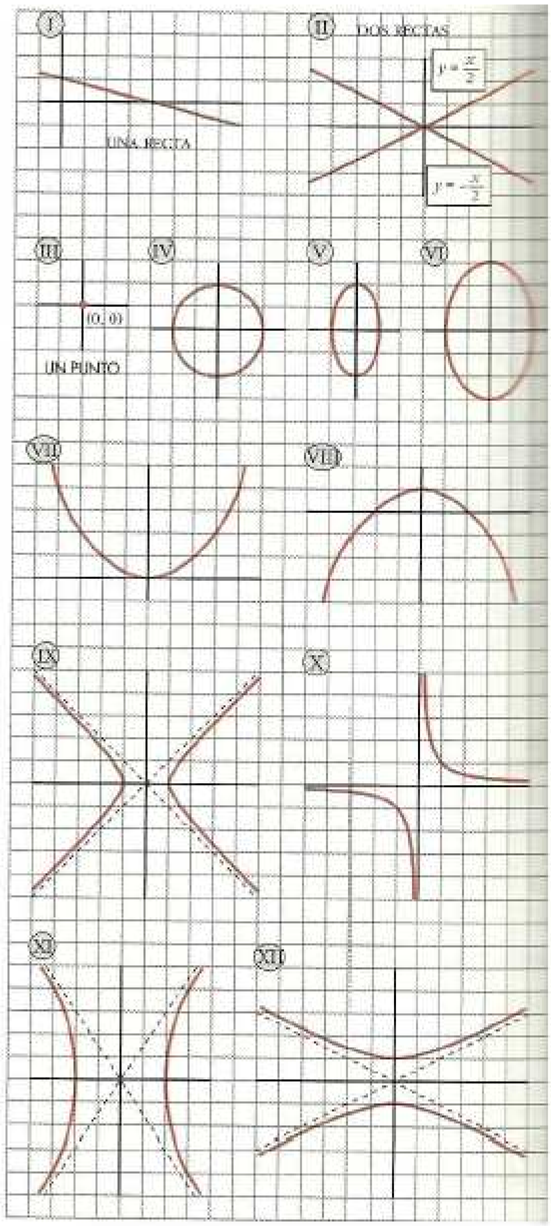
$c)\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1 \qquad d)\ \dfrac{x}{4}+y=1$

$e)\ \dfrac{x^2}{4}+y=1 \qquad f)\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

$g)\ y^2-\dfrac{x^2}{4}=1 \qquad h)\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=0$

$i)\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=0 \qquad j)\ \dfrac{x^2}{4}-y=0$

$k)\ x^2-y^2=1 \qquad l)\ x.y=1$



<u>**Objetivos:**</u>

Relacionar cada cónica con sus distintas ecuaciones y obtener éstas a partir de varios elementos o propiedades.(3)
Relacionar las ecuaciones de las cónicas con su representación gráfica y viceversa.(8)

<u>**Contenidos:**</u>

- Clasificación y propiedades de las cónicas.
- Identificación de la gráfica con las ecuaciones de las cónicas.
- Reconocimiento gráfico y analítico de los elementos.

Sistemas de representación:
Simbólico ⟺ Gráfico

Situación / Contexto:
Educativa/ Matemático

Competencias:
Argumentar y justificar
Representar
Lenguaje simbólico

Complejidad:
Conexión

TAREA 4:
La órbita que describe la Tierra alrededor del Sol es una cónica de excentricidad 0.017 y semieje mayor 149.60 millones de kilómetros. Calcula:

a) La longitud del semieje menor.

b) Sabiendo que el Sol está situado en uno de los focos, halla la máxima y la mínima distancia que lo separan de la Tierra.

Objetivos:
Identificar los diferentes elementos de las cónicas y describir cómo influyen en la clasificación de éstas.(2)
Identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos.(9)

Contenidos:
- Elipse
- Obtención de los elementos de la cónica
- Identificación de la cónica a partir de su excentricidad y relaciones métricas

Sistemas de representación:
Simbólico
Situación / Contexto:
Científica/ Órbitas de los planetas

Competencias:
Modelizar
Resolver y plantear problemas

Complejidad:
Reflexión

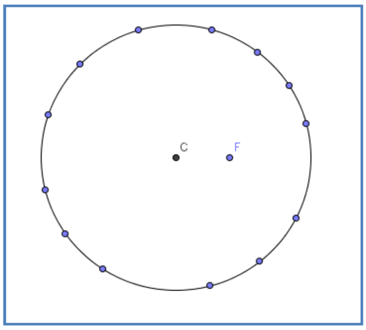
MEJORA DE LA SECUENCIACIÓN DE ACTIVIDADES

Aunque presentemos una mejora de nuestra secuenciación anterior, no pretendemos abarcar todos los contenidos y objetivos especificados en este tema para un nivel de 1º de Bachillerato, y somos conscientes de que se necesitarían más tareas para que el alumnado alcance los objetivos y asimile con mayor eficacia los contenidos.
Hemos mantenido un orden similar en las tareas, únicamente hemos añadido una nueva y modificado las anteriores con idea de mejorarlas pero manteniendo objetivos y contenidos. En la mejora se añade algún objetivo (el uso de las nuevas tecnologías, en la actividad 2, por ejemplo). En cuanto a la complejidad, ha variado en algunas actividades (como en la número 3 al introducir un parámetro) pero sigue manteniendo el orden creciente, empezando con actividades manipulativas y de reproducción, continuando con aquellas de conexión y terminando con la reflexión. El añadir la tarea manipulativa está promoviendo la motivación del alumnado y trata de provocar un sentimiento de acercamiento físico y visual a la carga matemática.
Las funciones se mantienen similares, pero añadimos mayor amplitud en los conocimientos, el uso de las nuevas tecnologías y a través de la primera actividad la función de fomentar la interrogación y el cuestionamiento.

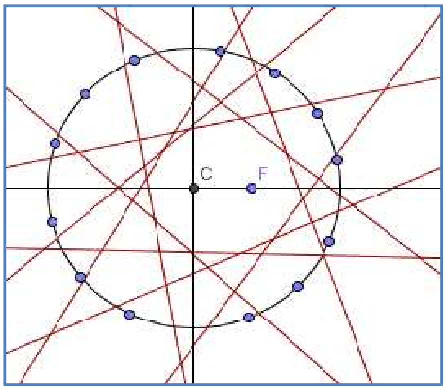
Pasaremos a detallar la nueva secuenciación propuesta:

Tarea 1. Cónicas con papiroflexia.

Dibuja un círculo en un papel de radio suficientemente grande y llama al centro del círculo C. A continuación marca un punto F diferente de C en el interior del círculo y elige puntos sobre este como en la siguiente figura:



Ahora haz coincidir cada punto de los anteriores con el punto F, dobla el papel y señala el doblez con lápiz. Tu papel ha de quedar de la siguiente forma:



¿Puedes señalar en tu folio alguna figura?
Esta actividad, que utilizaremos en primer lugar, sirve de motivación para la introducción tanto de la idea de lugar geométrico como la de cónicas. Además, también nos es útil para observar los conocimientos previos que nuestros alumnos poseen sobre el tema.
Este ejercicio intenta despertar en los alumnos la curiosidad por el estudio de las cónicas.

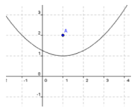
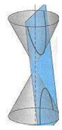
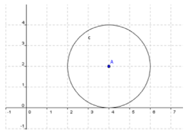
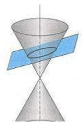
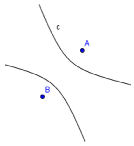
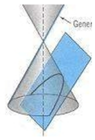
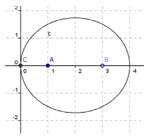
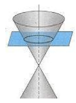
Tarea 2: Lugar geométrico con Geogebra.

Halla el lugar geométrico que cumplen todos los puntos del plano cuya distancia al origen de coordenadas es 5. Utiliza Geogebra para visualizar este ejercicio usando el comando "activar rastro".
¿Qué utilidad tiene la cónica anterior en la vida diaria? ¿Es importante? ¿Por qué?
Hemos comenzado mejorando la tarea que teníamos propuesta en un principio cambiando en el enunciado "ecuación" por "lugar geométrico", pues nos parece más adecuado introducir este concepto en la actividad ya que lo vamos a utilizar en la posterior comprobación de ésta con Geogebra.
Además hemos añadido la representación de las cónicas mediante herramientas tecnológicas para que el alumno se familiarice con ellas visualmente y reflexione sobre las posibles aplicaciones de éstas en su entorno más cercano.

Tarea 3: Posiciones relativas
Obtén el valor de k para que la recta $x + y + k = 0$ sea tangente, secante o exterior a la siguiente cónica $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$. Razona previamente de qué cónica se trata.

Esta actividad, además de poner en acción los procedimientos de cálculo para la incidencia entre recta y circunferencia, intenta crear en el alumno una idea general y esclarecedora de la misma, en contraposición de un mero ejercicio de cálculo. Habrá que tener en cuenta que la introducción de un parámetro en la ecuación general de una recta aumenta la complejidad.

Tarea 4: Sistemas de representación y fenomenología de las cónicas
Relaciona los siguientes elementos y justifica en qué te basas para establecer dicha relación.

Elipse	$(x-4)^2+(y-2)^2=4$			
Parábola	$x^2-2x-4y=-5$			
Hipérbola	$(x-4)^2-3y^2=1$			
Circunferencia	$2x^2+3y^2=6$			

Es muy intuitiva y visual y además ofrece una amplia diversidad a la hora de realizarla, ya que se puede proponer en grupo, para realizarla de forma oral, etc,..
Implica el conocimiento de las diferentes cónicas, de sus elementos, sus representaciones, en definitiva con ella hacemos un estudio global de todo lo que se ha explicado.
Hemos elegido ésta como mejora porque es una actividad más completa ya que incluye otros tipos de representaciones donde se incluyen el uso de éstas en la vida cotidiana. Por otra parte es más compleja ya que todos los elementos que aparecen no tienen por qué estar relacionados, lo cual requiere una mayor reflexión.

Tarea 5: Fenomenología de las cónicas

La órbita que describe la Tierra alrededor del Sol es una cónica de excentricidad 0.017 y semieje mayor 149.60 millones de kilómetros. Calcula:

a) La longitud del semieje menor.

b) Sabiendo que el Sol está situado en uno de los focos, halla la máxima y la mínima distancia que lo separan de la Tierra.

Hemos creído conveniente no modificar esta actividad porque la consideramos suficientemente completa para el grupo de alumnos al que va dirigida, y creemos que para cualquier otro tipo de problema sobre cónicas en el que se pretendan resolver cuestiones de la vida cotidiana abarcaría conocimientos superiores, y se saldría de lo establecido en el Currículum Oficial y de nuestras intenciones como educadores.